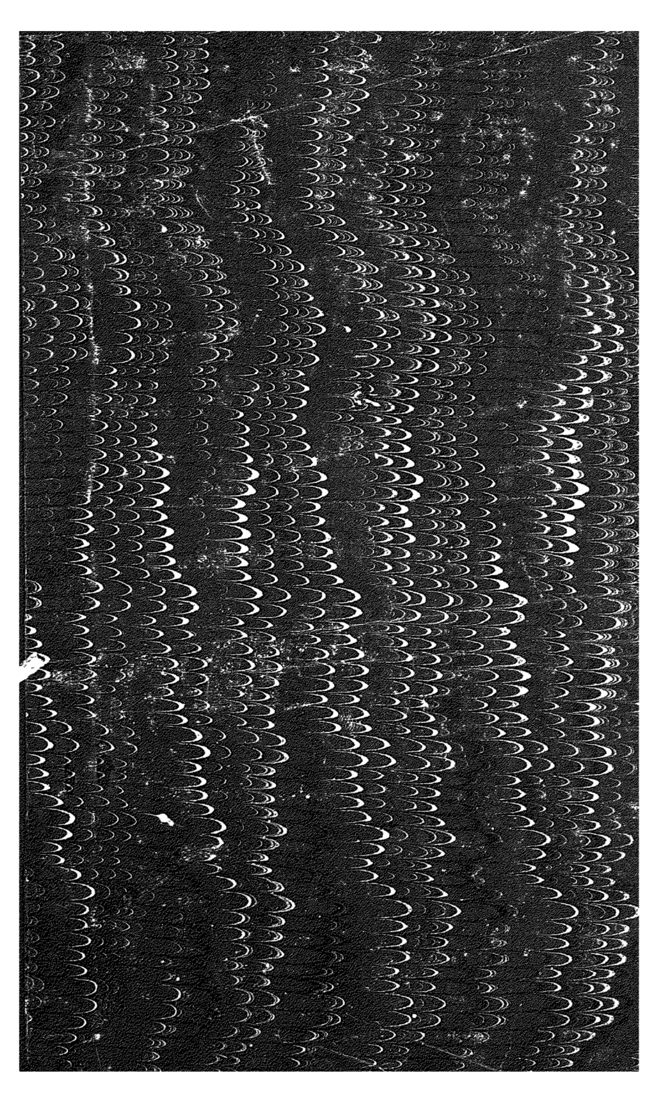
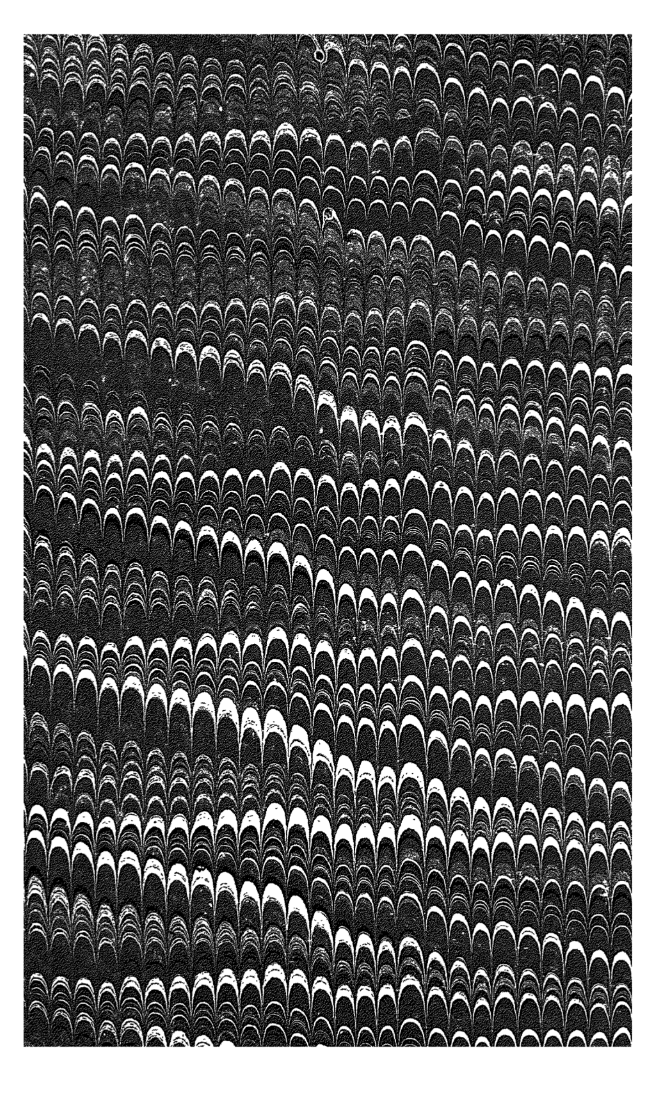

رقم ٢٦٢
المكان علوم رياضية وفلكية





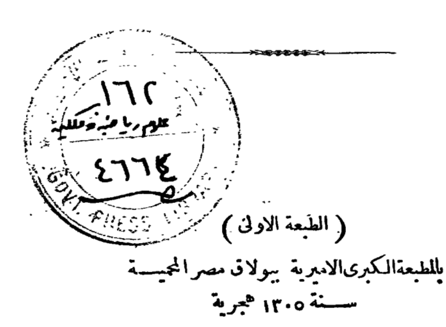
الجـــزء الاوّل

من كتاب التحفة البهيـــة فى الاصوَل الهندسـيةً

تأليف

حضرة احمـــد بك نظيم

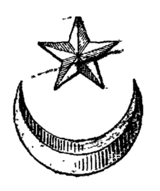
ناظـــر بمدرســة دار العـــلوم وقـــلم الترجـــه



(الطَبعة الاولى)

بالمطبعة الكبرى الاميرية ببولاق مصر المحميـــة

ســـنة ١٣٠٥ هجرية



بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله مبدع نظام الكائنات على محور الاستقامة والثبات والصلاة والسلام على نبينا قطب دائرة الكرة الكونية وعلى آله وأصحابه المتشكلين بأشكال أعماله السنية (وبعد) فلما كانت مدرسة التجهيزية فى احتياج الى كتاب فى الاصول الهندسية على حسب البروجرام اعتنيت بجمعه فجاء بحمد الله على وفق المرام وجزأته الى أربعة أجزاء كل جزء منها لسنة من سنيها المكتبية وسميته (التحفة البهية فى الاصول الهندسية) ثم عنّ لى أن أزيده فوائد وأوشحه بطرف فرائد تحتاج اليها الفرقة التحضيرية من مدرسة المهندسخانة الخديوية فميزتها بدقة الحروف كما هو المستعمل المألوف والله أسأل أن يعم نفعه وأن يحسن فى النفوس وقعه فى ظل من حسن التفاته للمعارف وأسدى لرعاياه كل تليد وطارف من هو بالثناء حقيق أفندينا (محمد باشا توفيق) متعه الله بأشباله الفخام وأنجاله الكرام

احمد نظيم
ناظر مدرسة دار العلوم
وقلم الترجمه

الجـــــزء الاول

من التحفة البهيـــة فى الاصول الهندســـية

فى الاشـــكال المستقيمة الاضلاع ومحيط الدائرة

البـاب الاول

فى الاشـــكال المستقيمة الاضـــلاع

الفصـــــل الاول

فى المبادى

(١) حجم الجسم عبارة عن المحل الذى يشغله من الفراغ

مهما كان صغر الجسم فانه لابد أن يكون له امتداد فى كل جهة من جهاته

ولا يعتبر عادة الا فى ثلاث جهات أصلية يعبر عنها بالابعاد وتسمى بالطول والعرض والارتفاع غير أن الارتفاع يسمى عمقا أو سمكا على حسب مقتضيات الاحوال

(٢) وأوجه الجسم المحددة له تسمى بالسطوح فالسطح اذن ليس الاغلافا تصوريا مجردا عن السمك أى لا يكون له غير بعدين فقط وهما الطول والعرض

(٣) وتقاطع السطوح يحدث عنه ما يسمى بالخطوط فالخطوط اذن مجردة عن السمك والعرض وليس لها سوى الطول

(٤) وتقاطع الخطين يحدث عنه ما يسمى بالنقطة فالنقطة لا امتداد لها

يطلق اسم الشكل على وجه العموم على كل من الاحجام والسطوح والخطوط

يقال للشكلين انهما متساويان متى أمكن انطباق أجزائهما على بعضها انطباقا تاما

(٥) الغرض من علم الهندسة دراسة خواص الاشكال

(٦) الخط المستقيم هو أقصر بعد بين نقطتين مثل المستقيم ا ب (شكل ١)
ويمكن تصور تولده من تحرك نقطة بحيث تتجه دائماً نحو نقطة أخرى ثابتة ومعينة

ش ١

ء ب ا ﺟ

ويستدل من ذلك

أولا — انه هو عبارة عن مقدار مقاس البعد المحصور بين النقطتين ا و ب

ثانيا — انه يمكن تصور امتداده الى ما لا نهاية له من جهتى النقطتين ا و ب نحو النقطتين ﺣ و ء مثلا والمجموع لا يتكون منه الا مستقيم واحد وبناء عليه يمكن تعيين اتجاه أى مستقيم بعد معرفة نقطتين منه

ثالثا — ان المستقيمين لا يمكن أن يشتركا فى نقطتين أو فى جزء من مستقيم الا اذا اتحدا فى جميع امتدادهما

رابعا — انه لا يمكن أن يمد بين النقطتين ا و ب الا مستقيم واحد

(٧) والخط المنكسر هو ما تركب من جملة أجزاء من خط مستقيم ليست على استقامة واحدة مثل الخط ا ب ﺣ ء (شكل ٢)

ش ٢

(٨) والخط المنحنى ما ليس مستقيما ولا مركبا من خطوط مستقيمة مثل الخط ا ب (شكل ٣)

ش ٣

ويمكن تصور تولد هذا الخط من تحرك نقطة بحيث تغير اتجاهها فى كل لحظة بدرجات غير محسوسة تابعة قانونا تاما

ويتنج من هذا التعريف أنه يمكن أن يمد بين النقطتين ا و ب خطوط منحنية لا نهاية لعددها واذن فالخطوط ثلاثة مستقيم ومنكسر ومنحن

(٩) السطح المستوى أو المستوى فقط هو السطح الذى ينطبق عليه المستقيم كمال الانطباق فى جميع جهاته

وحيث قد علم مما تقدم أنه لا يوجد الا نوع واحد من المستقيم فيعلم ضرورة

أولا — عدم تعدد نوع المستوى

ثانيا — أنه يمكن تصور امتداد المستوى فى كل جهة من جهاته امتدادا غير نهائى والمجموع لا يتكون منه الا مستو واحد

ثالثا — ان المستقيم يمكن أن يمر به مستويات لا نهاية لعددها

رابعا — ان كل مستقيم اشترك مع المستوى فى نقطتين انطبق عليه فى جميع امتداده

(١٠) ولنذكر هذه الفوائد الآتية

النظرية هى قضية تؤول بواسطة البرهان الى البديهيات

الفائدة هى نظرية معدة لتحضير برهان نظرية أخرى أهم منها

النتيجة هى الثمرة المستخرجة من نظرية أو جملة نظريات

العملية هى المسئلة التى يراد حلها وجوابها يسمى حلا

العكس هو قضية يكون فرضها نتيجة قضية أخرى ونتيجتها فرضا لتلك القضية

التنبيه هو اشارة الى مفهوم يؤخذ من قضية أو جملة قضايا تقدمت

نظـــــرية

(١١) كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستو واحد لا اثنان

لتكن ا و ب و ح النقط الثلاث (شكل ٤)

ش ٤

الاول — يمر بالمستقيم ا ب مستو نرمز له بحرف ع ثم يتصور دورانه حول هذا المستقيم حتى يصل الى نقطة ح وبذلك يتعين وضعه

الثانى — اذا فرض امكان امرار مستو آخر عَ بالنقط الثلاث المذكورة وكانت م احدى نقطه فنصل بين م و ى احدى نقط المستقيم ا ب بمستقيم م ى بحيث يكون قاطعا للمستقيم ا ح فمن حيث ان المستقيم م ى الموجود فى مستوى عَ مار بنقطتى هـ و ى من المستوى ع فيكون موجودا فيه بتمامه (٩ رابعا)

وينتج من ذلك

أولا — ان كل مستقيمين متقاطعين يتعين بهما مستو

ثانيا — ان كل مستقيم ونقطة خارجة عنه يتعين بهما مستو

ثالثا — انه يكفى لانطباق مستو على آخر أو جزأى مستويين على بعضهما اشتراكهما فى ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة

الفصل الثانى

فى الزوايا

تعاريف

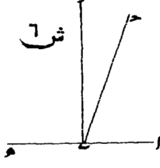
(١٢) اذا تقاطع المستقيمان اب و اح فى نقطة ا (شكل ٥) فان جزء المستوى حاب أى الانفراج الواقع بينهما يسمى زاوية ويسمى المستقيمان المذكوران المحددان لها بضلعى الزاوية وتسمى نقطة تلاقيهما ا برأس الزاوية



تقرأ الزاوية تارة بحرف الرأس وحده اذا كانت منفردة وبحروف ثلاثة بشرط أن يكون حرف الرأس فى الوسط اذا اشتركت فى الرأس مع زوايا أخرى

لا يرتبط مقدار أى زاوية بطول ضلعيها بل بالانفراج الواقع بينهما وعلى ذلك فالزاويتان المتساويتان هما اللتان ينطبق انفراجهما على بعضهما بدون نظر الى تفاوت طول الاضلاع

كل زاويتين مثل اب ح و ح ب ى اشتركتا فى ضلع واحد واتحدتا فى الرأس يقال لهما متجاورتان كما فى (شكل ٦)



يمكن ضم زاويتين أو أكثر الى بعضهما أو طرح زاوية من أخرى فالزاوية اب ى = اب ح + ح ب ى والزاوية ح ب ى = اب ى — اب ح (شكل ٦)

(١٣) أنواع الزاوية ثلاثة قائمة وحادة ومنفرجة

فالزاوية القائمة هى احدى الزاويتين المتجاورتين المتساويتين الحادثتين من تلاقى مستقيم بآخر مثل زاوية اب ى وزاوية ى ب هـ (شكل ٦)

والزاوية الحادة هى ما كانت أصغر من القائمة مثل اب ح و ح ب ى

والزاوية المنفرجة هى ما كانت أكبر من الزاوية القائمة مثل زاوية ح ب هـ

(١٤) المستقيم المنصف لزاوية هو مستقيم يمر برأسها ويقسم الانفراج الواقع بين ضلعيها الى قسمين متساويين مثل المستقيم ب ح المنصف لزاوية اب ى (شكل ٦)

نظـــــرية

(١٥) كل نقطة مفروضة على مستقيم لا يمكن أن يمد منها الا مستقيم واحد يصنع معه زاويتين متجاورتين قائمتين (شكل ٧)

يمد لذلك من نقطة ب المستقيم ب ح فيصنع مع المستقيم اح زاويتين متجاورتين ا ب ح ، ح ب ح فان كانتا متساويتين كان هو المستقيم المطلوب (١٣) والا يتصور نقل الزاوية الصغرى ا ب ح جهة الشمال فى الوضع د ب ح بحيث تكون زاوية ا ب ح = زاوية د ب ح ثم يمد من نقطة ب المستقيم ب و منصف الزاوية ح ب د فيكون هو المستقيم المطلوب وذلك لان زاوية ا ب ح = د ب ح وزاوية ح ب و = و ب د بالتنصيف وبجمع هاتين المتساويتين على بعضهما طرفا على طرف يحدث

ا ب ح + ح ب و = د ب ح + و ب د أو ا ب و = و ب ح

وحيث انهما متجاورتان وحادثتان من تلاقى مستقيم بآخر فتكون كل منهما قائمة (١٣) ثم ان كل مستقيم يفرض خلاف ب و مثل ب د لابد وأن يصنع مع المستقيم اح زاويتين متجاورتين مختلفتين أى غير قائمتين لان

زاوية د ب ح = و ب ح − و ب د ، (١)

زاوية د ب ا = و ب ا + و ب د (٢)

وينتج من ذلك

أولا — ان الزوايا القائمة كلها متساوية

ثانيا — ان مجموع الزاويتين الحادثتين من تلاقى مستقيم بآخر يساوى زاويتين قائمتين لانه لو جمع المتساويتان (١) ، (٢) السابقتان يحدث

د ب ح + د ب ا = و ب ح + و ب ا = ٢ ق

فاذا كانت احداهما قائمة تكون الاخرى كذلك

تنبيه — الزاويتان د ب ح ، د ب ا يقال لهما متكاملتان والزاويتان د ب ح ، د ب و يقال لهما متتامتان

ثالثا — ان مجموع الزوايا المجتمعة حول نقطة واحدة يساوى أربع زوايا قوائم أعنى ان
هـ و ا + ا و ب + ب و حـ + حـ و ء + ء و هـ = ٤ ق (شكل ٨)
لانه لومدّ من نقطة و المستقيم م ن لكانت جميع هذه الزوايا بعضها فوق هذا المستقيم والبعض الآخر تحته وحيث ان مجموع الزوايا التى فوقه يساوى قائمتين وكذلك الذى تحته فيكون مجموع الكل مساويا لاربع قوائم

شكل ٨

رابعا — اذا أحدث مستقيم بتقاطعه مع آخر زاويتين متجاورتين قائمتين كان هذا الاخير مكوّنا أيضا مع الاوّل زاويتين متجاورتين قائمتين (شكل ٩)
أعنى اذا صنع المستقيم حـ ء بتقاطعه مع المستقيم ا ب الزاويتين ا هـ حـ , حـ هـ ب المتجاورتين القائمتين كانت الزاويتان ا هـ حـ , ا هـ ء المتجاورتان الحادثتان من تقاطع المستقيم ا ب بالمستقيم حـ ء قائمتين أيضا وهو أمر ظاهر لانه حيث كانت احدى المتجاورتين ا هـ حـ قائمة فتكون الاخرى كذلك (نتيجة ٢)

شكل ٩

نظـــــــرية

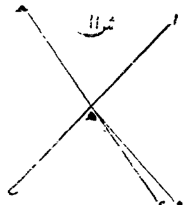
(١٦) اذا كان مجموع أى زاويتين متجاورتين مساويا لقائمتين كان ضلعاهما المتطرفان على استقامة واحدة (شكل ١٠)

أعنى اذا كان ا ب ء + ء ب حـ = ٢ ق يكون المستقيم ا ب على استقامة ب حـ وذلك لانه لوفرض خلاف ماذكر وأن مستقيما آخر مثل ب هـ هو الذى على استقامة ب حـ فانه يحصل بمقتضى ماتقدم (١٥ نتيجة ٢) ان هـ ب ء + ء ب حـ = ٢ ق وبمقارنة هذه المتساوية بالمتساوية المفروضة يعلم ان زاوية هـ ب ء = ا ب ء وهو محال وحينئذ فلابد أن يكون ب هـ منطبقا على ب ا

شكل ١٠

نظـــــرية

(١٧) اذا تقاطع مستقيمان فكل زاويتين متقابلتين بالرأس تكونان متساويتين (شكل ١١)



فالزاويتان ا هـ حـ , ٮ هـ ب متساويتان لان كل واحدة منهما تكمل زاوية واحدة ا هـ ٮ وكذا الزاويتان ا هـ ٮ , حـ هـ ب متساويتان لان كل واحدة منهما مكملة لزاوية واحدة ا هـ حـ

عكس هذه النظرية حقيقي أى اذا وجدنا فى جهتى المستقيم اب ان الزاويتين اهـحـ , ٮهـب المتقابلتين بالرأس متساويتان يكون المستقيم ٮهـ على استقامة هـحـ لانه لو لم يكن كذلك لكان هـو مثلا على استقامة حـهـ وحينئذ يجب أن تكون زاوية وهـب = زاوية ٮهـب وهذا لا يتأتى الا اذا كان وهـ منطبقا على ٮهـ

الفصـــل الثـالث

فى المثلثات

(١٨) المثلث هو جزء المستوى المحدود بثلاثة مستقيمات متقاطعة مثنى (شكل ١٢) يتركب المثلث من ستة أشياء وهى ثلاث زوايا وثلاثة أضلاع فالزوايا هى ا , ب , حـ ورؤسها هى رؤس المثلث والاضلاع هى اب , ب حـ , ا حـ ويرمز لها عادة بالرموز اَ , بَ , حـَ لبيان انها مقابلة للزوايا ا , ب , حـ

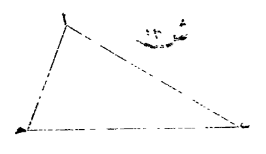


اذا تساوت الاضلاع الثلاثة من المثلث قيل له متساوى الاضلاع وان تساوى فيه ضلعان فقط سمى مثلثا متساوى الساقين ويسمى الضلع الثالث قاعدة

وان اختلفت أضلاعه قيل له مثلث مختلف الاضلاع واذا وجدت فيه زاوية قائمة قيل له مثلث قائم الزاوية وسمى الضلع المقابل للقائمة وترا

نظـــــرية

(١٩) أيّ ضلع من أيّ مثلث أصغر من مجموع الضلعين الآخرين وأكبر من فاضلهما (شكل ١٣) أعني ان



ب ح < اب + اح ، ب ح > اح ـ اب

لاثبات ذلك يقال حيث كان ب ح مستقيما مارا بين النقطتين ب و ح فهو أصغر من كل خط منكسر مار بالنقطتين المذكورتين وبذلك يثبت ان

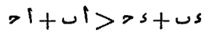
ب ح < اب + اح وبمثله يكون اح < اب + ب ح ، اب < اح + ب ح

ثم يقال وحيث كان اح < اب + ب ح فاذا طرحنا اب من طرفي هذه المتباينة يحدث

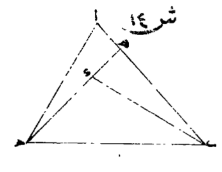
اح ـ اب < ب ح أو ب ح > اح ـ اب وهو المراد

نظـــــرية

(٢٠) اذا فرضت نقطة داخل مثلث ووصل منها الى نهايتي أحد أضلاعه بمستقيمين كان مجموع الضلعين الواصلين أصغر من مجموع الضلعين المحيطين بهما (شكل ١٤) أعني ان



د ب + د ح < اب + اح



وذلك لانه لو مدّ ح د على استقامته جهة د حتى يلاقي المستقيم اب في نقطة هـ لحدث بمقتضى النظرية السابقة ان

ح هـ < اهـ + اح أو ح د + د هـ < اهـ + اح

وكذلك يحدث من المثلث

ب د هـ ان (١٩) ب د < ب هـ + هـ د

فاذا ضمت هاتان المتباينتان على بعضهما طرفا على طرف أعني جمع الطرف الاكبر على الطرف الاكبر والطرف الاصغر على الطرف الاصغر كان ضرورة مجموع الطرفين الاولين أكبر من مجموع الطرفين الآخرين ويحدث

ح د + د هـ + ب د < اهـ + اح + ب هـ + هـ د

وبطرح هـ د من طرفي المتباينة يحدث

حـ د + د ب > ا هـ + ا حـ + ب هـ   أو

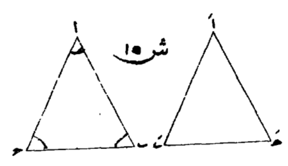
حـ د + د ب > ا هـ + ب هـ + ا حـ   أو

حـ د + د ب > ا ب + ا حـ   وهو المطلوب

تنبيه – من المعلوم ان هذه النظرية تكون حقيقية أيضا لو أخذت نقطة د على أحد أضلاع المثلث

نظـــــرية

(٢١) في كل مثلث متساوى الساقين الزاويتان المقابلتان لساقيه تكونان متساويتين (شكل ١٥) اذا كان اب = احـ تكون زاوية ب = زاوية حـ وللبرهنة على ذلك نضع بجانب المثلث ا ب حـ عين المثلث مقلوبا في الوضع اَ بَ حَ ثم نطبق الشكل اَ بَ حَ على الشكل ا ب حـ بحيث نضع الزاويتين اَ و ا المتساويتين على بعضهما



فتقع ضرورة نقطة حَ على ب ونقطة بَ على حـ على مقتضى الفرض وحينئذ ينطبق حَ بَ على ب حـ (٦) وينطبق الشكلان على بعضهما وتكون زاوية بَ = حـ وحيث كانت بَ = ب فتكون زاوية ب = حـ وهو المطلوب

نتيجـــة – ينتج من ذلك أن المثلث المتساوى الاضلاع يكون متساوى الزوايا

نظـــــرية

(٢٢) وبالعكس اذا تساوت زاويتان من مثلث يتساوى الضلعان المقابلان لهما ويكون المثلث متساوى الساقين (شكل ١٥) اذا كانت زاوية ب = زاوية حـ يبرهن على أن الضلع اب = الضلع احـ

لذلك يوضع بجانب المثلث ابحـ عين المثلث مقلوبا في الوضع اَ حَ بَ ثم نضع الشكل الثاني

على الاول بان يطبق الضلع حَ بَ على مساويه ب ح وحيث ان زاوية حَ أو ح = زاوية ب فرضا يأخذ الضلع حَ أَ الاتجاه ب ا وبعين هذا السبب يأخذ الضلع بَ أَ الاتجاه ح ا واذن تنطبق نقطة أَ على نقطة ا وينطبق الشكلان على بعضهما انطباقا تاما ويكون أَ حَ = اب وحيث ان أَ حَ هو عين اح فيكون اب = اح وهو المطلوب

نتيجـــة — ينتج من ذلك أن المثلث المتساوى الزوايا يكون متساوى الاضلاع أيضا

نظـــــرية

(٢٣) المستقيم المنصف لزاوية المثلث المتساوى الساقين المحصورة بين ساقيه يمر بمنتصف قاعدته ويصنع معها زاويتين متجاورتين متساويتين (شكل ١٦)

شكل ١٦

اذا كانت زاوية ب ا د = زاوية د ا ح يبرهن أولا على أن ب د = د ح وثانيا على أن زاوية ب د ا = زاوية ا د ح

لذلك يدور الشكل د ا ح حول ا د لانطباقه على ا د ب فمن حيث ان زاوية ح ا د = د ا ب فرضا يأخذ الضلع ا ح الاتجاه ا ب وحيث كان المثلث متساوى الساقين تقع نقطة ح على نقطة ب ولكون نقطة د ثابتة ينطبق د ح على د ب ويكون أولا د ب = د ح وثانيا زاوية ب د ا = زاوية ح د ا وهو المطلوب

تنبيه — المستقيم ا د يسمى بالمستقيم المتوسط للمثلث المتساوى الساقين

نظـــــرية

(٢٤) يتساوى المثلثان اذا وجد فيهما واحد من الامور الآتية

أولا — اذا ساوى من أحدهما زاوية والضلعان المحيطان بها النظائرها من الثانى

ثانيا — اذا ساوى من أحدهما ضلع ومجاورتاه من الزوايا النظائرها من الثانى

ثالثا — اذا تساوت فيهما الاضلاع الثلاثة كل لنظيره

الاول — اذا كانت زاوية أَ = زاوية ا والضلع أَ بَ = الضلع اب والضلع أَ حَ = الضلع اح يبرهن على تساوى باقى الاجزاء المتناظرة فيهما (شكل ١٧)

وذلك لانه اذا أجريت عملية تطبيق مماثلة للتى أجريت بنمرة ٢١ ينطبق المثلثان على بعضهما ويتساويان

الثانى ـ اذا كان الضلع أَ بَ = الضلع أ ب وزاوية أَ = زاوية أ وزاوية بَ تساوى زاوية ب يبرهن على تساوى الاجزاء الباقية منهما على التناظر (شكل ١٧)

وذلك لانه اذا أجريت عملية تطبيق مماثلة للتى أجريت بنمرة ٢٢ ينطبق المثلثان على بعضهما وتتساوى فيهما باقى الاجزاء المتناظرة ويكونان متساويين

ش ١٧

(تنبيهات) الاول ـ ما ذكرناه يقتضى أن الاشياء المفروض تساويها فى المنطوق تكون موضوعة على ترتيب واحد فاذا لم يكن الامر كذلك لزم ادارة المثلث أَ بَ حَ دورة كاملة قبل تطبيقه على الثانى

الثانى ـ الزوايا المتساوية فى المثلثين المتساويين تقابل الاضلاع المتساوية

الثالث ـ اذا كان الضلع أَ بَ = الضلع أ ب والضلع أَ حَ = الضلع أ ح والضلع بَ حَ = الضلع ب ح تتساوى الزوايا المتناظرة فيهما ويكون المثلثان متساويين (شكل ١٨)

للبرهنة على ذلك نضع المثلث أَ بَ حَ تحت المثلث أ ب ح مقلوبا فى الوضع بحيث يأخذ الضلع أَ بَ الوضع ب ء والضلع أَ حَ الوضع ح ء ثم نصل أ ء فالمثلث أ ب ء يصير اذن متساوى الساقين وبناء عليه تكون زاوية ء أ ب = زاوية ب ء أ (٢١) وكذلك المثلث أ ء ح يكون متساوى الساقين ومنه ينتج أن زاوية ح أ ء = ح ء أ وبناء عليه تكون زاوية ب أ ح = زاوية ب ء ح ويكون المثلثان أ ب ح و ب ح ء متساويين لتساوى الضلعين أ ب و أ ح والزاوية المحصورة بينهما لنظائرها من الثانى (الاول)

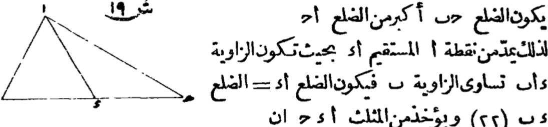
ش ١٨

تنبيه ـ اذا تصادف وقوع المستقيم أ ء خارج الشكل أ ب ح ء بأن كان المثلثان منفرجى الزاوية فان الزاويتين أ و ء تكونان أيضا متساويتين لانهما تكونان فى هذه الحالة عبارة عن الفرقين الكائنين بين زوايا متساوية

نظـــــرية

(٢٥) فى أى مثلث الزاوية الكبرى يقابلها الضلع الاكبر وبالعكس (شكل ١٩)

أولا ـ اذا كانت زاوية حاب أكبر من زاوية ب



يكون الضلع حب أكبر من الضلع اح

لذلك يمد من نقطة ا المستقيم اد بحيث تكون الزاوية داب تساوى الزاوية ب فيكون الضلع اد = الضلع دب (٢٢) ويؤخذ من المثلث ادح ان

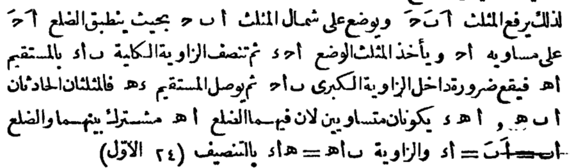
اح > اد + دح أو اح > دب + دح أو اح > بح أو بح > اح

ثانيا ـ اذا كان الضلع بح أكبر من الضلع اح تكون زاوية ا أكبر من زاوية ب والبرهنة على ذلك يقال لو لم تكن زاوية ا أكبر من زاوية ب لكانت اما مساوية لها أو أصغر منها وفى الحالة الاولى يكون الضلع بح مساويا للضلع اح (٢٢) وهو مخالف للفرض وفى الحالة الثانية يكون الضلع بح أصغر من الضلع اح (أولا) وهو مغاير أيضا للفرض وبناء عليه يجب أن يكون الضلع بح أكبر من الضلع اح وهو المراد

نظـــــرية

(٢٦) اذا ساوى ضلعان من مثلث نظيريهما من مثلث آخر وكانت الزاوية المحصورة بين ضلعى المثلث الاول أكبر من نظيرتها من المثلث الثانى يكون الضلع الثالث من المثلث الاول أكبر من نظيره من المثلث الثانى (شكل ٢٠)

اذا كان الضلع اب = اَبَ والضلع اح = اَحَ وكانت زاوية ا أكبر من زاوية اَ يكون الضلع بح > بَحَ



لذلك يرفع المثلث اَبَحَ ويوضع على شمال المثلث ابح بحيث ينطبق الضلع اَحَ على مساويه اح ويأخذ المثلث الوضع احد ثم تنصف الزاوية الكاية باد بالمستقيم اه فيقع ضرورة داخل الزاوية الكبرى باح ثم يوصل المستقيم ده فالمثلثان الحادثان ابه و اهد يكونان متساويين لان فيهما الضلع اه مشترك بينهما والضلع اب = اَبَ = اد والزاوية باه = هاد بالتنصيف (٢٤ الاول)

وينتج من تساويهما أن الضلع ب هـ = هـ ء ويؤخذ من المثلث حـ هـ ء أن حـ ء أو ب َ حـ َ < ء هـ + هـ حـ أو < حـ ب وهو المراد (١٩)

نتيجة — عكس هذه النظرية حقيق أعنى انه اذا كان ا ب = ا َ ب َ , ا حـ = ا َ حـ َ , ب حـ > ب َ حـ َ تكون زاوية ب ا حـ > ب َ ا َ حـ َ

لانه لولم يكن الامر كذلك لكانت زاوية ب ا حـ اما مساوية لزاوية ا َ أو أصغر منها ففى الحالة الاولى يكون الضلع ب حـ = ب َ حـ َ (٢٢) وفى الثانية يكون ب حـ < ب َ حـ َ وكلاهما مغاير للفرض فتكون اذن زاوية ب ا حـ > ا َ وهو المطلوب

نظـــــــرية

(٢٧) مجموع زوايا المثلث الداخلة يساوى زاويتين قائمتين (شكل ٢١) أعنى ان

ا + ب + حـ = ٢ ق

وللوصول الى ذلك يتصور انزلاق المثلث ا ب حـ فى الجهة حـ ب على مسطرة موضوعة على الضلع حـ ب الى أن تأخذ نقطة حـ محل النقطة ب ومن حيث ان الانزلاق حاصل فى آن واحد لجميع اجزاء المثلث لارتباطها ببعضها فان نقطة حـ عندما تصل الى الوضع ب تصل أيضا نقطة ب الى الوضع ب َ على بعد من نقطة ب مساو للبعد ب حـ وكذا تصل نقطة ا الى الوضع ا َ على بعد منها مساو للبعد ب حـ ثم اذا وصل المستقيم ا ا َ فالمثلث الحادث ا ا َ ب يكون مساويا للمثلث الاصلى ا ب حـ لان فيهما الضلع ا ب مشترك بينهما والضلع ا َ ب = الضلع ا حـ فرضا والضلع ا ا َ = الضلع ب حـ وينتج من تساويهما ان زاوية ا َ ب ا المقابلة للضلع ا ا َ = زاوية ب ا حـ المقابلة للضلع ب حـ وحيث كانت زاوية ا َ ب ب َ = زاوية حـ فرضا يكون مجموع الزوايا الثلاثة المتجاورة ب َ ب ا َ + ا َ ب ا + ا ب حـ مساويا لمجموع زوايا المثلث الداخلة أى حـ + حـ ب ا + حـ ا ب وحيث كان المجموع الاول مساويا لزاويتين قائمتين (١٥ ثانيا) فيكون المجموع الثانى كذلك وهو المطلوب

وينتج من هذه النظرية

أولا — انه اذا مد أحد أضلاع مثلث فان الزاوية الحادثة بين امتداده والضلع المجاور له تماثل زاوية ا ب ب َ = مجموع زوايا المثلث ما عدا المجاورة لها

ثانيا - مجموع زوايا المثلث الخارجة الحادثة بين امتداد أضلاعه الثلاثة والاضلاع المجاورة لها يساوى أربع قوائم وذلك لان مجموع كل زاويتين متجاورتين موجودتين على كل رأس من رؤس المثلث الثلاثة مساو لقائمتين وحينئذ يكون مجموع الكل مساويا ٦ قوائم وبطرح مقدار الزوايا الداخلة أى قائمتين من ٦ قوائم يكون الباقى وهو مجموع الزوايا الخارجة فقط مساويا ٤ قوائم

ثالثا - مجموع الزاويتين الحادتين من المثلث القائم الزاوية يساوى زاوية قائمة واذن فهما تماميتان فاذا كان المثلث متساوى الساقين كان مقدار كل واحدة منهما نصف زاوية قائمة

رابعا - اذا ساوت زاويتان من مثلث زاويتين اخريين من مثلث آخر تكون الزاوية الثالثة من الاول مساوية للثالثة من الثانى

خامسا - لايمكن أن يوجد فى أى مثلث الازاوية واحدة قائمة أو زاوية واحدة منفرجة

سادسا - مقدار كل زاوية من زوايا المثلث متساوى الاضلاع ثلث قائمتين أو ثلثا قائمة

سابعا - يمكن الاكتفاء فى تساوى المثلثات بتساوى ضلع واحد ومطلق زاويتين من احدهما لنظائرها من الثانى وحينئذ فالمثلثان القائما الزاوية يتساويان اذا ساوى من احدهما وتر وزاوية دون القائمة أو ضلع وزاوية دون القائمة لنظائرها من الثانى

نظـــــرية

(٢٨) يتساوى المثلثان القائما الزاوية اذا ساوى من أحدهما وتر وضلع لنظيريهما من الثانى (شكل ٢٢)

اذا كان الوتر ا حـ = الوتر اَ حـَ والضلع ا ب = الضلع اَ بَ يكون المثلثان ا ب حـ , اَ بَ حـَ متساويين

وللبرهنة على ذلك يرفع المثلث اَ بَ حـَ ويطبق على المثلث ا ب حـ بان يوضع الضلع اَ بَ على مساويه ا ب وحيث ان زاوية بَ تساوى زاوية ب بالقيام بأخذ الضلع بَ حـَ الاتجاه ب حـ وتقع نقطة حـَ على نقطة حـ اذ لو فرض خلاف ذلك للزم أن تقع داخلا أو خارجا عنها فاذا فرض وقوعها فى نقطة ء فيكون اَ حـَ منطبقا على اء ويكون المثلث احـء

متساوى الساقين لان اح = اد وتكون اذن زاوية ح = زاوية ادح لكنه بالتأمل نرى أن زاوية ح حادة لانها أصغر من قائمة (٢٧ ثالثا) وزاوية ادح الخارجة عن المثلث ا ب د منفرجة لانها أكبر من قائمة (٢٧ أولا) وتساويهما محال وما نتج هذا الا من فرض وقوع نقطة حَ داخل نقطة ح وبمثل ذلك يبرهن على عدم امكان وقوعها خارجا عنها وحينئذ لابد أن تقع عليها وينطبق المثلثان على بعضهما ويصيران متساويين وهو المطلوب

الفصل الرابع

فى المستقيمات المتعامدة والمائلة

(٢٩) المستقيم العمودى على آخر هو ما يصنع معه زاويتين متجاورتين متساويتين

ينتج من هذا التعريف ومما ذكر بنمرتى ١٥ و ٢٣ ما يأتى

أولا — ان من نقطة على مستقيم لا يمكن أن يقام الا مستقيم واحد عمودى عليه

ثانيا — ان كل مستقيم عمودى على آخر يكون الاخير عمودا عليه

ثالثا — ان المستقيم المنصف لزاوية رأس المثلث المتساوى الساقين يكون عمودا على قاعدته ويسمى ارتفاعه

(٣٠) المستقيم المائل على آخر هو ما يصنع معه زاويتين متجاورتين مختلفتين

نظرية

(٣١) كل نقطة مفروضة خارج مستقيم يمكن أن ينزل منها عمود واحد عليه لا اثنان (شكل ٢٣)

وللبرهنة على ذلك يمد من نقطة ح المستقيم حد فيكون مع المستقيم اب زاويتين حدا , حدب ان كانتا متساويتين كان هو العمود المطلوب والا فنتصور تحرك المستقيم المذكور حول نقطة ح بحيث تبعد نقطة د شيأ فشيأ عن نقطة ا فيشاهد أن الزاوية الكبرى حدا تأخذ فى النقص وأن الزاوية الصغرى حدب تأخذ فى الزيادة وحينئذ فلا بد وأن يوجد وضع للمستقيم المتحرك مثل حه تكون فيه الزاويتان المتجاورتان متساويتين ويكون هو العمود المطلوب

شكل ٢٣

هذا ولو استمر المستقيم المتحرك على الحركة بعد وصوله الى الوضع حـ هـ يشاهد أن التساوى الذى كان حاصلا بين الزاويتين المتجاورتين قد اختل ومن ذلك يعلم أنه لا يوجد للمستقيم المتحرك الاوضع واحد فريد تكون فيه الزاويتان المتجاورتان متساويتين وهو المطلوب

نظـــــــرية

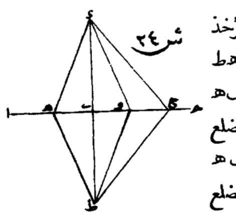
(٣٢) اذا أنزل من نقطة خارج مستقيم عمود عليه وعدة موائل يحدث

أولا — أن العمود أصغر من كل مائل

ثانيا — ان المائلين المتساويى البعد عن موقع العمود يكونان متساويين

ثالثا — ان المائل الذى افترق عن موقع العمود ببعد أكبر فهو أكبر (شكل ٢٤)

الاول — يبرهن على أن العمود د ب < المائل د هـ لذلك يمد العمود د ب على استقامته جهة ب ويؤخذ منه البعد ب ط = البعد د ب ويوصل هـ ط فالمثلث الحادث هـ ب ط يكون مساويا للمثلث د ب هـ لوجود الضلع ب هـ مشتركا بينهما ولتساوى الضلع ب ط للضلع ب د عملا ولمساواة الزاوية ط ب هـ لزاوية هـ ب د بالقيام وينتج من تساويهما ان الضلع هـ ط = الضلع د هـ لكنه يؤخذ من المثلث د هـ ط أن



د ط أو د ب + ب ط < د هـ + هـ ط أو ٢ د ب < ٢ د هـ أو د ب < د هـ

الثانى — يبرهن على ان المائل د و يساوى المائل د هـ اذا كان البعد ب و يساوى البعد ب هـ

ولذلك يقال ان المثلثين د ب هـ , د ب و متساويان لاشتراك الضلع د ب فيهما ولمساواة البعد و ب للبعد ب هـ ولمساواة الزاوية د ب و للزاوية د ب هـ بالقيام ومن تساويهما ينتج ان المائل د و يساوى المائل د هـ

الثالث — اذا كان البعد ب ع أكبر من ب و يكون المائل د ع أكبر من د و لذلك يوصل المستقيمان و ط , ع ط ويبرهن كما سبق على ان و ط = و د , ع ط = د ع وحيث كانت نقطة و داخل المثلث د ع ط يحدث (٢٠)

و ط + و د < ط ع + د ع أو ٢ د و < ٢ د ع أو د و < د ع وهو المطلوب

تنبيه ـ اذا وجد المائلان ءه و ءع في جهتي العمود فانه يؤخذ البعد ب و يساوي البعد ب ه فيكون البعد ءو = ءه ويبرهن كما سبق

(نتيجة ١) عكس القضايا السابقة حقيق و يسهل البرهنة عليه

(نتيجة ٢) من نقطة خارجة عن مستقيم لا يمكن أن يمد اليه سوى مستقيمين متساويين

فائدة ـ العمود الفريد الذي يمكن مده من نقطة الى مستقيم يقدر به بعد هذه النقطة عن هذا المستقيم

الفصل الخامس

في المحل الهندسي

(٣٣) المحل الهندسي هو المحل الجامع لجميع النقط المتحدة الخاصية أو التابعة لقانون واحد وهو اما أن يكون مستقيما أو منحنيا أو سطحا مستويا أو منحنيا ولا نتكلم الا على الخط المستقيم منها وما عداه يأتي الكلام عليه في محله

نظرية

(٣٤) اذا أقيم عمود على وسط مستقيم محدود فكل نقطة من نقط هذا العمود تكون على بعدين متساويين من نهايتي المستقيم وكل نقطة خارجة عنه تكون على بعدين مختلفين من نهايتي المستقيم وأطولهما ما كان قاطعا للعمود (شكل ٢٥)

الاول ـ اذا كان حء عمودا على وسط اب يبرهن على ان البعد ءب = البعد ءا ولذلك يقال حيث كان المستقيمان ءب , ءا مائلين متساويي البعد عن موقع العمود ءح فيكونان متساويين (٣٢ الثاني)

الثاني ـ يطلب البرهنة على أن ها > هب ولذلك يوصل وب فيكون وب = او (الاول) وحيث ان المثلث هب و يؤخذ منه ان هب < هو + ب و فلو وضعنا بدلا عن ب و ما يساويه وهو او ينتج أن

هب < هو + وا أو هب < ها أو ها > هب وهو المطلوب

نتيجة ـ كل مستقيم تكون جميع نقطه متساوية البعد عن نهايتي مستقيم معلوم يلزم أن يكون عمودا على وسطه

نظــــــــرية

(٣٥) اذا نصفت زاوية بمستقيم تكون كل نقطة من نقطه على بعدين متساويين من ضلعيها وكل نقطة خارجة عنه تكون على بعدين مختلفين منهما وأطولهما القاطع للمستقيم المنصف (شكل ٢٦)

الاول — يطلب البرهنة على ان البعد هـ ل = البعد هـ م ولذلك يقال ان المثلثين ب ل هـ و ب هـ م القائمي الزاوية متساويان لوجود الوتر ب هـ مشترك فيهما ولمساواة الزاوية ل ب هـ للزاوية هـ ب م فرضا وينتج من تساويهما ان هـ ل = هـ م

الثانى — يبرهن على أن البعـد و ك > و ح ولذلك ينزل العمود ح ط فيكون مساويا ح ك (الاول) فاذا وصل و ط تحصل و ط < و ح + ح ط أو و ط < و ك وحيث كان و ح عمودا على ب ح فيكون أصغر من المائل و ط وعليـه يكون و ح < و ك أو و ك > و ح

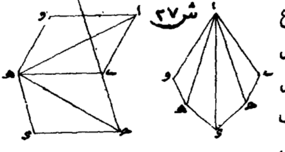
(نتيجـة ١) كل مستقيم مار بين ضلعي زاوية وكانت كل نقطة من نقطه على بعدين متساويين من ضلعيها يكون منصفا للزاوية

(نتيجـة ٢) المستقيمان المنصفان لزاويتين متكاملتين يكونان متعامدين

الفصــــــل السادس

فى الاشكال المحـــــددبة

(٣٦) السطوح المستوية المحددة بجملة مستقيمات متقاطعة مثنى تسمى أشكالا كثيرة الاضلاع أو مضلعات مستوية وأبسط هـذه الاشكال هو المثلث وماله أربعة أضلاع يسمى شكلا رباعيا وماله خمسة يسمى خماسيا وماله عشرة أضلاع يسمى ذا العشرة الاضـلاع وهكذا فالشكل ا ب ح د هـ و (شكل ٢٧) يدل على شكل سداسى جميع زواياه بارزة أى فتحاتها داخـل الشكل وأما (الشكل ٢٨) فانه يدل على شكل



سداسى احدى زواياه داخلة بمعنى أن انفراجها خارج الشكل فالشكل الاول يسمى شكلا محدبا والثانى غير محدب فالشكل المحدب هو الذى اذا مد أى ضلع من أضلاعه يجعل الشكل كله فى احدى جهتيه بخلاف الشكل الغير المحدب فانه مد الضلع ح ب مثلا على استقامته فانه يقسم الشكل الى جزأين كل جزء منهما فى جهة من جهتيه

(٣٧) المستقيمات اهـ , اد , اح الواصلة بين رؤس زوايا الشكل الغير المتجاورة تسمى اقطار الشكل فالمثلث ليس له أقطار والشكل الرباعى له اثنان والخماسى له خمسة والسداسى له تسعة

وعلى العموم اذا رمزنا بحرف ن الى عدد أضلاع شكل ما كان عدد أقطاره مساويا $\frac{ن(ن-٣)}{٢}$

وذلك لان الشكل الذى عدد أضلاعه ن يتولد عنه أقطار واصلة من رأسه عددها ن — ٣ وبضرب هذا المقدار فى عدد الزوايا يتوصل الى العدد ن (ن — ٣) الا أنه يشاهد أن كل قطر منها محسوب مرتين واذن فبقسمة المقدار السابق على ٢ يتوصل الى $\frac{ن(ن-٣)}{٢}$ وهو مقدار الاقطار التى يمكن وجودها فى أى شكل فهو القانون العمومى الذى يعرف منه مقدار أقطار أى شكل فأقطار الشكل ذى العشرين ضلعا هى

$$\frac{٢٠(٢٠-٣)}{٢} = ١٧٠ \text{ قطرا}$$

نظــــــــرية

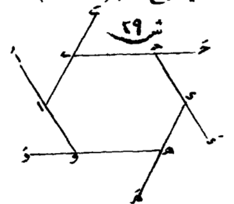
(٣٨) مجموع الزوايا الداخلة لاى شكل كثير الاضلاع يساوى من القوائم بقدر عدد أضلاعه الا اثنين مضروبا فى اثنين

وللبرهنة على ذلك توصل أقطاره الخارجة من رأس واحدة (شكل ٢٧) فينقسم بذلك الشكل الى مثلثات بقدر عدد اضلاعه الا اثنين لان كل ضلع من أضلاع الشكل مرسوم عليه مثلث ماعدا الضلعين المحيطين برأسه وحيث انه تقدم بنمرة ٢٧ أن مجموع زوايا المثلث يساوى زاويتين قائمتين فيحتوى الشكل اذن على قوائم بقدر ضعف عدد المثلثات أو بقدر عدد أضلاعه الا اثنين مضروبا فى اثنين وهو المطلوب

نتيجــــة — ينتج مما ذكر أن مقدار الزوايا القائمة الموجودة فى أى شكل رباعى مساوية الى (ن — ٢) ٢ أو (٤ — ٢) ٢ = ٤ أى أربع قوائم وزوايا الشكل الخماسى تعادل ست قوائم والسداسى ثمانية وهكذا

نظـــــــرية

(٣٩) اذا مدت أضلاع أى شكل مهما كان عدد أضلاعه فى جهة واحدة كان مجموع الزوايا الخارجة المتكونة من كل ضلع وامتداد الضلع المجاور له مساويا أربع قوائم (شكل ٢٩)



والبرهنة على ذلك يلاحظ أنه باضافة كل زاوية خارجة مثل آاب الى مجاورتها يتحصل من مجموعهما زاويتان قائمتان وأن هذا المجموع مكرر مرات بقدر عدد الاضلاع أعنى ان مجموع الزوايا الداخلة للشكل والخارجة عنه مساو من القوائم بقدر ضعف عدد أضلاعه فاذا طرح من هذا المجموع مقدار مجموع الزوايا القائمة الموجودة فى زوايا الشكل الداخلة المساوية الى ضعف عدد أضلاعه الا اثنين كان الباقى وهو ٢×٢ أو ٤ قوائم يدل على مجموع الزوايا القائمة المشتمل عليها مجموع الزوايا الخارجة وهو المراد

نتيجـــة ـ أى شكل كثير الاضلاع لا يمكن أن يحتوى على أكثر من ثلاث زوايا حادة لانه لو احتوى على أكثر من ذلك لوجد فى زواياه الخارجة أربع زوايا بالاقل يكون مجموعها أكبر من أربع قوائم وهو محال

(٤٠) (تعريف) كثيرا الاضلاع المتحدان فى عدد الاضلاع يكونان متساويين اذا تركبا من مثلثات متساوية متحدة العدد ومتشابهة وضعا أعنى اذا وضع أحدهما على الآخر انطبق عليه انطباقا تاما

نظـــــــرية

(٤١) يتساوى كثيرا الاضلاع المتحدان فى عدد الاضلاع اذا تساوت منهما الاضلاع والزوايا المتناظرة بقطع النظر عن معرفة تساوى ضلع والزاويتين المجاورتين له من أحدهما لنظائرها من الثانى (شكل ٣٠)

مثلا اذا ساوت الزوايا ا و ب و ح من كثير الاضلاع ا ب ح ى هـ نظائرها على الترتيب آ و بَ و حَ من كثير الاضلاع آ بَ حَ ىَ هَ المتحد مع الاول فى عدد الاضلاع وكانت الاضلاع اب و بح و حى من الاول مساوية على الترتيب لنظائرها آبَ و بَحَ و حَىَ من الثانى

بقطع النظر عن معرفة تساوى الضلع هـ ى لنظيره ىَ هـَ وعن تساوى الزاويتين ى ، هـ المحيطتين بالضلع الاول لنظائرها ىَ ، هـَ من الثانى يلزم أن يكون كثيرا الاضلاع متساويين

وللبرهنة على ذلك نضع كثير الاضلاع الثانى على الاوّل بحيث ينطبق الضلع اَ هـَ على مساويه ا هـ ومن تساوى الزاوية اَ لنظيرتها ا ينطبق الضلع اَ بَ على مساويه ا ب وتقع النقطة بَ على ب ولتساوى الزاوية بَ لنظيرتها ب يقع الضلع بَ حَ على مساويه ب حـ وتقع نقطة حَ على نقطة حـ وكذا ينطبق الضلع حَ ىَ على حـ ى وحيث ان نهايتى الضلع ىَ هـَ قد انطبقت على نهايتى الضلع ى هـ فينطبق الشكلان على بعضهما انطباقا تاما و يكونان متساويين

نتيجـــة — ينتج من ذلك ان كثير الاضلاع الذى عدد أضلاعه ن يتعين تعيينا تاما اذا علم منه معالم قدرها ٢ ن — ٣ وذلك لانه يحتاج الى معالم من أضلاعه قدرها ن — ١ ومن زواياه قدرها ن — ٢ وحينئذ فالمثلث يتعين بمعالم قدرها ٢×٣ — ٣ = ٣ أى بثلاثة معالم والشكل الرباعى بخمسة والخماسى بسبعة وهكذا

نظـــــــرية

(٤٢) يتساوى الشكلان الرباعيان اذا تساوى فيهما زاوية والاضلاع الاربعة كل لنظيره (شكل ٣١)

مثلا اذا فرض فى الشكلين الرباعيين ا ب حـ ى ، اَ بَ حَ ىَ ان زاوية ا = زاوية اَ والضلع ا ب = اَ بَ والضلع ب حـ = الضلع بَ حَ والضلع حـ ى = الضلع حَ ىَ والضلع ى ا = الضلع ىَ اَ يكونان متساويين

وللبرهنة على ذلك نمد القطران ب ى ، بَ ىَ فيحدث من ذلك المثلثان ا ب ى ، اَ بَ ىَ المتساويان لتساوى زاوية والضلعين المحيطين بها من أحدهما لنظائرهما من الثانى وينتج من تساويهما تساوى الضلع ب ى للضلع بَ ىَ وحينئذ يكون المثلثان ب ى حـ ، بَ ىَ حَ متساويين لتساوى أضلاعهما المتناظرة فيهما وبناء عليه يكون الشكلان الرباعيان متساويين لتركبهما من مثلثات متساوية متحدة العدد ومتماثلة وضعا

الفصل السابع

فى المستقيمات المتوازية

(٤٣) المستقيمان المتوازيان هما مستقيمان موجودان فى مستو واحد ولا يمكن تلاقيهما مهما امتدا

فاذا فرض مستقيم مثل اب (شكل ٣٢) واقيم من احدى نقطة ح عمود عليه حل ومد من نقطة ء احدى نقط المستقيم ءه بحيث يكون قاطعا له وللمستقيم اب فالزاويتان الحادثتان حءه , حهء من المستقيم القاطع ءه والمستقيمين اب , ءح مجموعهما يساوى قائمة (٢٧ ثالثا)

شكل ٣٢

اذا تقرر هذا وفرض تحريك المستقيم ءه حول نقطة ء بحيث تبعد نقطة ه شيأ فشيأ عن نقطة ح يشاهد ازدياد الزاوية حءه مع نقصان تماميتها حهء فاذا استمر المستقيم المتحرك فى حركته فانه لابد أن يأتى له وضع مثل ءو تكون فيه زاوية حءو قائمة لكن هذا لا يتأتى الا اذا انعدمت زاوية حهء كلية بواسطة تباعد نقطة ه عن نقطة ح الى غير نهاية وحينئذ فيقال للمستقيمين فى هذه الحالة انهما متوازيان

ويمكن اعادة ما ذكر بخصوص المستقيم ءه الكائن على شمال العمود ءح على المستقيم المذكور اذا كان على يمينه واذن فكل مستقيم مار بنقطة ء وصانع مع ءح زاوية دون القائمة فى احدى جهتيه يمكن اعتباره كانه أحد أوضاع المستقيم المتحرك ءه قبل وصوله الى الوضع حء أعنى انه لابد ان يصنع امتداده مع المستقيم اب زاوية تكون تمامية للزاوية التى يصنعها مع العمود ءح وحينئذ فيقال على وجه العموم انه اذا اقيم عمود على مستقيم من احدى نقطه ومد من نقطة اخرى منه مائل عليه فان المائل اذا امتد يقطع العمود

نظرية

(٤٤) كل نقطة مفروضة خارج مستقيم يمكن أن يمد منها مستقيم واحد موازله لا اثنان (شكل ٣٣)

برهان الاول ينزل من نقطة د العمود دح على المستقيم أ ب
ثم يقام من نقطة د العمود د و على المستقيم دح فيكون د و
موازيا الى أ ب لانهما ان لم يكونا متوازيين لتلاقيا فى نقطة مثل ع
وبناء عليه يكون كل من ع و د ، ع ب ح عمودا على المستقيم دح
وهو محال اذ من نقطة خارج مستقيم لا يمكن الا انزال عمود واحد وما
نشأ هذا الا من فرض عدم توازيهما فاذن يكونان متوازيين وهو
المطلوب
وبرهان الثانى يقال لو أمكن مد مستقيم آخر ده موازيا للمستقيم أ ب
فمن حيث ان المستقيم د و عمود على دح فيكون ده مائلا عليه وبامتداده يقطع
المستقيم أ ب (٤٣)

(نتيجة ١) المستقيمان العمودان على مستقيم ثالث متوازيان
(نتيجة ٢) المستقيم العمودى على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودا على الثانى لانه ان لم
يكن هذا الثانى عمودا لكان مائلا عليه وحينئذ اذا امتد يقطع الموازى له وهو محال
(نتيجة ٣) المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان لانه ان لم يكونا كذلك لتلاقيا فى نقطة
ومن هذا ينتج امكان مرور مستقيمين موازيين لمستقيم ثالث من نقطة واحدة وهو محال

(٤٥) اذا قطع مستقيم مستقيمين (شكل ٣٤) تكوّن من التقاطع ثمان زوايا متساوية
مثنى لحصول التقابل بالرؤس فاذا اعتبرنا تلك الزوايا بالنسبة لوضع المستقيمين سميت أربعة منها
داخلة والاربعة الباقية خارجة
واذا اعتبرت بالنسبة للقاطع سميت متبادلة داخلة
أو خارجة أو متناظرة أو مجاورة داخلة أو خارجة
ولتوضيح تلك التسمية نقول
أولا — الزاويتان المتبادلتان الداخلتان هما مثل
الزاويتين حعع و ب ع ع والزاويتين أ ع ع و د ع ع
ثانيا — الزاويتان المتبادلتان الخارجتان هما مثل الزاويتين حعو و ب ع هـ والزاويتين
د ع و و أ ع هـ
ثالثا — الزاويتان المتناظرتان هما مثل الزاويتين و ع د و ع ع ب والزاويتين و ع ح
و ع ع أ والزاويتين د ع هـ و ب ع هـ والزاويتين ح ع هـ و أ ع هـ

رابعا - الزاويتان المجاورتان للقاطع الداخلتان هما مثل الزاويتين حعه و اعع والزاويتين بحع و ءعع

خامسا - الزاويتان المجاورتان للقاطع الخارجتان هما مثل الزاويتين وعء و بحه والزاويتين حعو و اعه

نظـــــرية

(٤٦) اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فالزاويتان المتبادلتان الداخلتان متساويتان (شكل ٣٥)

ش ٣٥

و برهان ذلك ننصف البعد ى ك بنقطة ل ثم ننزل منها العمود ل ع على المستقيم ا ب ويمدّ على استقامته فيكون ضرورة عمودا على حء (٤٤ نتيجة ٢) فالمثلثان القائما الزاوية الحادثان يكونان متساويين لان فيهما الوتر ى ل = الوتر ل ك عملا والزاوية ى ل ط = الزاوية ع ل ك لتقابلهما بالرؤس وينتج من تساويهما (٢٧ سابعا) ان الزاوية ل ى ط = الزاوية ع ك ل وهو المطلوب

تنبيه - بناء على ما تقدم تسهل البرهنة على تساوى الزوايا المتبادلة الخارجة والمتناظرة وعلى تكامل الزوايا المجاورة للقاطع الداخلة والخارجة

نظـــــرية

(٤٧) اذا قطع مستقيم مستقيمين وكانت الزاويتان المتبادلتان الداخلتان متساويتين يكون المستقيمان متوازيين (شكل ٣٦) أى اذا كانت زاوية ءعط = زاوية اطع يكون المستقيم حء موازيا للمستقيم اب

ش ٣٦

وللبرهنة على ذلك يقال لو فرض أن حء غير مواز للمستقيم اب بل ان الموازى له مستقيم آخر مثل ع ل لكانت زاوية ل ع ط = زاوية اطع = ءعط وهو

محال لان زاوية ل ع ط جزء من زاوية ى ع ط وما نشأ هذا الا من فرض أن الموازى للمستقيم
اب هو غير حى وهو المطلوب

تنبيه - يبرهن بمثل ذلك على توازى المستقيمين المذكورين اذا كانت الزوايا المتبادلة الخارجة متساوية أو كانت الزوايا المتناظرة كذلك أو كانت الزوايا المجاورة للقاطع داخلة أو خارجة مكملة لبعضها مثنى

نظـــــرية

(٤٨) المستقيمات المتوازية المحصورة بين مستقيمين متوازيين تكون متساوية (شكل ٣٧)
أعنى ان المستقيمين هو و ع ط المتوازيين المحصورين بين المستقيمين اب و حى المتوازيين أيضا يكونان متساويين

ش ٣٧

والبرهنة على ذلك يمد المستقيم ع و فالمثلثان الحادثان هو ع و ع و ط يكونان متساويين لان الضلع ع و مشترك فيهما ولان زاوية هو ع = زاوية و ع ط لكونهما متبادلتين داخلتين بالنسبة للمستقيمين المتوازيين هو و ع ط والقاطع ع و (٤٦) ولان زاوية ه ع و = زاوية ع و ط لكونهما متبادلتين داخلتين أيضا بالنسبة للمستقيمين اب و حى المتوازيين ولعين القاطع ع و وينتج من تساويهما ان الضلع هو = الضلع ع ط وهو المراد

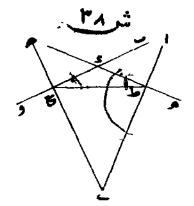
نتيجـــة - اذا كان المستقيمان المتوازيان هو و ع ط عمودين على كلا المستقيمين المتوازيين فيكونان متساويين أيضا لانهما يصيران متوازيين ولما كان العمود المحصور بين المتوازيين يقدر به البعد المحصور بينهما أمكن أن يقال على وجه العموم ان المستقيمين المتوازيين هما على أبعاد متساوية فى جميع امتدادهما

تنبيه - عكس هذه النظرية حقيقى دائما أعنى انه اذا كان المستقيمان هو و ع ط متساويين ومتوازيين يكون المستقيمان اب و حى الحاصران لهما متوازيين (شكل ٣٧) والبرهنة على ذلك يقال ان المثلثين هو ع و و ع و ط متساويان لان الضلع ع و مشترك فيهما والضلع هو = ع ط فرضا وحيث انهما متوازيان والمستقيم ع و قاطع لهما تكون الزاويتان المتبادلتان هو ع و ع و ط متساويتين وينتج من تساويهما ان زاوية ه ع و = زاوية ع و ط وحيث ان هاتين الزاويتين هما متبادلتان داخلتان يكون المستقيمان اب و حى متوازيين (٤٧)

نتيجـــة ـ اذا كان المستقيمان هـ و و ع ط المتساويان والمتوازيان عمودين على أحد المستقيمين المفروضين فيكونان ضرورة عمودين على الثانى وحينئذ يمكن أن يقال أن كل مستقيمين على أبعاد متساوية فى جميع امتدادهما يكونان متوازيين

نظـــــــرية

(٤٩) المستقيمان العمودان على ضلعى زاوية لا يكونان متوازيين (شكل ٣٨)



اذا فرضت زاوية ا ب ح وكان المستقيم م هـ عمودا على الضلع ا ب و ء و عمودا على ح ب فلا يكون المستقيمان م هـ و ء و متوازيين وللبرهنة على ذلك يوصل المستقيم ع ط فمن حيث ان كل واحـدة من الزاويتين م ط ع و ء ع ط دون القائمة فيكون مجموعهما أقل من قائمتين وحينئذ فلا يكون م ط موازيا ء ع وهو المراد

نظـــــــرية

(٥٠) الزاويتـان اللتان أضـلاعهما المتناظرة متوازية تكونان اما متساويتين أو مكملتين لبعضهما فتكونان متساويتين اذا كانت أضلاعهما المتناظرة متحدة الجهـة مثنى أو متضادتها وتكونان مكملتين لبعضهما اذا كان غير ذلك (شكل ٣٩)

وللبرهنة على ذلك يقال اذا فرضـنا أن زاويتى ا ب ح و ء هـ ف أضلاعهما المتناظرة متوازية ومتحدة الجهة مثنى تكونان متساويتين

لانه لو مد المستقيم ء هـ على استقامته حتى يقابل المستقيم ح ب فى نقطة ع لكانت زاوية هـ ع ح = زاوية ب بالتناظر وتساوى زاوية ء هـ ف أيضا وحينئذ تكون زاوية ء هـ ف = زاوية ب

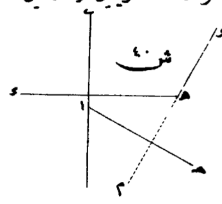
والزاويتان ح هـ ص و ا ب ح اللتان أضلاعهما المتناظرة متوازية ومتضادة فى الجهة تكونان متساويتين

لان زاوية ح هـ ع = زاوية ء هـ ف = زاوية ب

وأما الزاويتان د هـ ى ، ا ب ح اللتان أضلاعهما المتناظرة متوازية واثنان منها متحدان في الجهة والاثنان الآخران متضادان فيها فتكونان متكاملتين
لان زاوية د هـ ى مكملة لزاوية د هـ ف أو لمساويتها ا ب ح وهو المطلوب
نتيجة — اذا تعذر معرفة الزاوية الواقعة بين مستقيمين لعدم تقاطع ضلعيها على ورق الرسم واريد معرفة الزاوية المذكورة فانه تؤخذ نقطة بين ضلعي الزاوية المذكورة ويرسم منها مستقيمان موازيان لضلعي الزاوية فالزاوية الحادثة بينهما تكون مساوية للزاوية المطلوبة

نظـــــرية

(٥١) الزاويتان اللتان أضلاعهما المتناظرة متعامدة تكونان اما متساويتين أو مكملتين لبعضهما (شكل ٤٠)



أي اذا فرضنا أن المستقيم د هـ عمود على ا ب والمستقيم و هـ عمود على ا ح تكون الزاويتان الحادثتان د هـ و ، د هـ م احداهما مساوية لزاوية ا والاخرى مكملة لها وللبرهنة على ذلك يتصور دوران الزاوية د هـ و حول نقطة هـ بمقدار زاوية قائمة وبدون تغيير مقدارها فالوضعان الاخيران اللذان يأخذهما المستقيمان د هـ ، هـ و يتعامدان على وضعيهما الاولين وحينئذ يكونان موازيين للمستقيمين ا ب ، ا ح وتكون الزاوية الحادثة بينهما اما مساوية للزاوية ا أو مكملة لها وهو المراد
تنبيه — يؤخذ من هذه النظرية والسابقة عليها أن المثلثين اللذين أضلاعهما المتناظرة متوازية أو متعامدة تكون زواياهما المتناظرة متساوية فقط
وذلك انه لو رمزنا لزوايا المثلثين المتناظرة أي المحصورة بين الاضلاع المتوازية المتناظرة أو المتعامدة كذلك بحروف ا ، اَ ، ب ، بَ ، ح ، حَ فانه لا يمكن أن يفرض بين هذه الزوايا سوى أحد هذه الامور الثلاثة وهي

(١) ا + اَ = ٢ ق ، ب + بَ = ٢ ق ، ح + حَ = ٢ ق
(٢) ا + اَ = ٢ ق ، ب + بَ = ٢ ق ، ح = حَ
(٣) ا = اَ ، ب = بَ ، ح = حَ

أما الامران الاولان فهما باطلان لانه ينتج من كل منهما ان مجموع زوايا المثلثين أكبر من ٤ قوائم وحينئذ يكون الثالث حقيقيا

الفصل الثامن

فى الاشكال المتوازية الاضلاع

(٥٢) شبه المنحرف هو شكل رباعى فيه ضلعان متوازيان فقط يسميان قاعدتيه مثل ا ب حـ د (شكل ٤١)

(٥٣) متوازى الاضلاع هو شكل رباعى أضلاعه المتقابلة متوازية مثل ا ب حـ د (شكل ٤٢)

وأنواعه المستطيل وهو متوازى أضلاع أضلاعه المتجاورة مختلفة وزواياه قائمة مثل ا ب حـ د (شكل ٤٣)

والمربع وهو متوازى أضلاع أضلاعه متساوية وزواياه قائمة مثل ا ب حـ د (شكل ٤٤)

والمعين وهو متوازى أضلاع أضلاعه متساوية وزواياه غير قائمة مثل ا ب حـ د (شكل ٤٥)

(٥٤) ينتج مما ذكر فى مبحث المتوازيات النتائج الآتية

اولا — ان الزوايا المتقابلة من متوازى الاضلاع تكون متساوية لان أضلاعها متوازية ومتضادة فى الجهة مثنى (٥٠)

ثانيا — ان كل زاويتين موجودتين على ضلع واحد من متوازى الاضلاع هما متكاملتان لانهما زاويتان داخلتان مجاورتان للقاطع

ثالثا — ان الاضلاع المتقابلة من متوازى الاضلاع تكون متساوية (٤٨)

رابعا — أن قطر متوازى الاضلاع يقسمه الى مثلثين متساويين (٤٨)

نظرية

(٥٥) كل شكل رباعى يكون متوازى الاضلاع اذا توفر فيه أحد الامور الآتية وهى

أولا — اذا تساوت زواياه المتقابلة

ثانيا — اذا كان كل زاويتين منه موجودتين على نهايتى ضلع واحد متكاملتين

ثالثا — اذا تساوت الاضلاع المتقابلة منه

رابعا — اذا تساوى وتوازى أى ضلعين متقابلين منه

(برهان الاول) يقال حيث كان كل زاويتين متقابلتين منه متساويتين وكان مجموع زواياه الداخلة مساويا ٤ قوائم يكون مجموع كل زاويتين موجودتين على نهايتى ضلع واحد مساويا قائمتين وهذا يستلزم توازى أضلاعه المتقابلة

(برهان الثانى) داخل فى برهان الاول

(برهان الثالث) يقال ان تساوى أضلاعه المتقابلة يستلزم تساوى المثلثين اللذين يحدثان من من وصل أحد قطريه لتساوى الاضلاع الثلاثة فيهما وينتج من تساوى المثلثين المذكورين تساوى الزوايا المتقابلة من الشكل الرباعى وحينئذ فيرجع الامر الى الاول

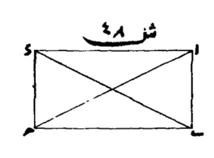
(برهان الرابع) يقال اذا كان الضلع اب يوازى ويساوى الضلع حـ د (شكل ٤٦) يكون المثلث اب د مساويا للمثلث د ب حـ لان الضلع ب د مشترك فيهما والضلع اب = د حـ فرضا وحيث كان هذان الضلعان متوازيين والمستقيم ب د قاطعا لهما تكون زاوية اب د = زاوية ب د حـ لكونهما متبادلتين داخلتين وينتج من تساويهما أن زاوية اد ب تساوى زاوية د ب حـ وحيث كانتا متبادلتين داخلتين فيكون المستقيمان اد , ب حـ متوازيين وهو المراد بيانه

ش ٤٦

نظـــــــرية

(٥٦) قطر متوازى الاضلاع ينصفان بعضهما (شكل ٤٧) وللبرهنة على ذلك يقال ان المثلثين ا د هـ , ب هـ حـ متساويان لان فيهما الضلع اد = الضلع ب حـ من خاصية الشكل (٥٤ ثالثا) وفيهما زاوية هـ اد = زاوية هـ حـ ب لانهما متبادلتان داخلتان بالنسبة للمستقيمين المتوازيين اد , ب حـ والقاطع لهما احـ وفيهما أيضا زاوية ادهـ = زاوية حـ ب هـ لكونهما متبادلتين داخلتين أيضا بالنسبة لعين المستقيمين المتوازيين والقاطع لهما ب د ومن تساويهما ينتج أن الاضلاع المقابلة للزوايا المتساوية هى متساوية أعنى أن اهـ = هـ حـ , د هـ = ب هـ وهو المطلوب

ش ٤٧

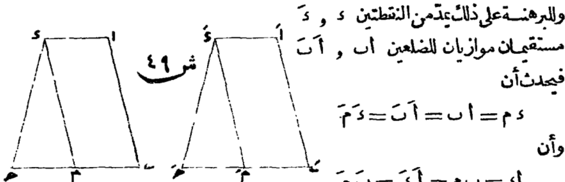


(نتيجة ١) قطرا المستطيل متساويان (شكل ٤٨) لان المثلثين ا ب ى , ا ى ح فيهما ضلعان والزاوية المحصورة بينهما من أحدهما مساوية لنظائرها من الآخر

(نتيجة ٢) قطرا المربع والمعين ينصفان بعضهما ويكونان متعامدين ولا حاجة للبرهنة على ذلك لسهولته

نظـــــرية

(٥٧) شبيها المنحرف يكونان متساويين متى تساوت فيهما الاضلاع الاربعة النظير لنظيره (شكل ٤٩)



وللبرهنة على ذلك يمد من النقطتين ى و ىَ مستقيمان موازيان للضلعين ا ب و اَ بَ فيحدث أن

ى م = ا ب = اَ بَ = ىَ مَ

وأن

ا ى = ب م = اَ ىَ = بَ مَ

وحينئذ يكون م ح = مَ حَ ويكون المثلثان ى م ح و ىَ مَ حَ متساويين لتساوى أضلاعهما الثلاثة المتناظرة وينتج من تساويهما أن زاوية ح = حَ وحينئذ فشبيها المنحرف المذكوران يدخلان فى النظرية العمومية لتساوى الاشكال الرباعية نمرة ٣٧

(تنبيهان) الاول - يتساوى متوازيا الاضلاع اذا ساوى من أحدهما زاوية والضلعان المحيطان بها النظائرها من الثانى ويتساوى المعينان اذا ساوى من أحدهما زاوية وضلع لنظيريهما من الثانى

وأما المستطيلان فيتساويان اذا ساوى من أحدهما ضلعان متجاوران لنظيريهما من الثانى

وأما المربعان فيتساويان اذا ساوى ضلع من أحدهما ضلعا من الآخر

ولا حاجة للبرهنة على هذه الامور لسهولتها

الثانى - تقدم (٤١ نتيجة) أن أى شكل رباعى يتعين عموما بمعرفة خمسة أشياء منه وقد علم الآن أن شبه المنحرف يتعين بأربعة فقط ومتوازى الاضلاع بثلاثة والمعين والمستطيل باثنين والمربع بواحد

الفصل التاسع

تمرينات

١ ـ المطلوب رسم زاوية متممة لزاوية معلومة

٢ ـ المطلوب رسم زاوية مكملة لزاوية معلومة

٣ ـ المطلوب البرهنة على أن المستقيمين المنصفين لزاويتين متكاملتين هما متعامدان

٤ ـ المطلوب البرهنة على أن المستقيمين المنصفين لزاويتين متقابلتين بالرؤس يكونان على استقامة واحدة

٥ ـ المطلوب البرهنة على أن مجموع قطرى أى شكل رباعى محدب أصغر من مجموع أضلاعه وأكبر من نصف مجموعها

٦ ـ المطلوب البرهنة على أنه اذا فرضت نقطة داخل مثلث ووصل منها الى رؤسه بمستقيمات كان مجموع هذه المستقيمات أصغر من مجموع أضلاع المثلث وأكبر من نصف مجموعها

٧ ـ المطلوب البرهنة على أنه اذا وصل من رأس مثلث الى وسط قاعدته بمستقيم كان هذا المستقيم أصغر من مجموع الضلعين المحيطين

٨ ـ المطلوب البرهنة على أن مجموع المستقيمات الواصلة من رؤس المثلث الى أواسط أضلاعه يكون أصغر من مجموع أضلاعه وأكبر من نصف مجموعها

٩ ـ المطلوب البرهنة على أن الاعمدة الثلاثة المقامة على أواسط أضلاع المثلث تتقاطع فى نقطة واحدة

١٠ ـ المطلوب البرهنة على أنه اذا أنزل من نهايتى قاعدة مثلث متساوى الساقين عمودان على الساقين كان هذان العمودان متساويين

١١ ـ المطلوب البرهنة على أن المستقيمات المنصفة لزوايا المثلث الثلاث تتقاطع فى نقطة واحدة

١٢ ـ المطلوب تعيين المستقيم المنصف لزاوية متكونة من مستقيمين لايمكن تقاطعهما فى حدود الرسم

١٣ ـ المطلوب البرهنة على أن المستقيمين المنصفين لزاويتين أضلاعهما المتناظرة متوازية يكونان اما متوازيين أو متعامدين ومثلهما المنصفان لزاويتين أضلاعهما المتناظرة متعامدة

١٤ ـ المطلوب البرهنة على أن الاعمدة الثلاثة النازلة من رؤس المثلث على أضلاعه تتقاطع فى نقطة واحدة

١٥ ـ المطلوب البرهنة على أنه اذا مد من رؤس أى شكل رباعى مستقيمات موازية لاقطاره فانه يتشكل من ذلك شكل متوازى الاضلاع يكون مكافئا لضعف الشكل الرباعى الاول

١٦ ـ المطلوب ايجاد المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن مستقيمين متوازيين معلومين

١٧ ـ المطلوب ايجاد المحل الهندسي للنقط الموضوعة على بعد معين من مستقيم معلوم

١٨ ـ المطلوب البرهنة على أن المستقيم الواصل بين منتصفي ضلعي مثلث يكون موازيا للضلع الثالث ومساويا لنصفه

١٩ ـ ما نوع الشكل الرباعي الذي يحدث اذا وصل بين أواسط أضلاع المعين بمستقيمات

٢٠ ـ المطلوب البرهنة على أن المستقيمات المنصفة لزوايا شكل رباعي يتكون عنها شكل رباعي آخر تكون زواياه المتقابلة متكاملة

الباب الثانى

فى محيط الدائرة وما يتعلق به

الفصل الاول

تعاريف

(٥٨) محيط الدائرة هو خط منحن جميع نقطه على ابعاد متساوية من نقطة داخله تسمى مركزا (شكل ٥٠)

شكل ٥٠

فالخط المنحنى ا ب ل ح ى هـ يسمى محيط الدائرة ونقطة و تسمى مركزا وبعبارة أخرى محيط الدائرة هو المحل الهندسي الجامع لجميع النقط المتساوية البعد عن نقطة ثابتة تسمى مركزا

والدائرة هي جزء المستوى المحاط بهذا الخط المنحنى

كل مستقيم مار بالمركز ومنته بنقطة من المحيط يسمى نصف قطر مثل و ا وكل مستقيم مار بالمركز ومنته بنقطتين من المحيط يسمى قطرا فبناء على هذا وعلى تعريف محيط الدائرة تكون أنصاف الاقطار متساوية والاقطار كذلك

القوس هو جزء من المحيط مثل ا ب ل ح ووتر القوس هو المستقيم الواصل بين نهايتيه مثل المستقيم ب ح الموتر للقوس ب ل ح غير أن هذا المستقيم يعتبر وترا القوس آخر ب ا هـ ء ح وحينئذ فكل وتر يقابله قوسان مجموعهما يساوي المحيط

القطعة هي جزء من الدائرة محصور بين قوس و وتره مثل القطعة ب ل ح ولما كان الوتر ب ح يقابله قوسان فيقابله أيضا قطعتان مجموعهما مساو للدائرة

متى أطلق لفظ القوس أو القطعة لا يفهم من ذلك الا القوس الصغير أو القطعة الصغيرة لانهما المقصودان عند عدم التقييد

القطاع هو جزء من الدائرة محصور بين قوس ونصفي القطرين المارين بنهايتيه مثل ا و ب

قاطع الدائرة هو المستقيم الذي يقطع محيطها في نقطتين مثل المستقيم م ط

المماس هو المستقيم الذي لا يشترك مع محيط الدائرة الا في نقطة واحدة تسمى نقطة التماس مثل المستقيم ق ے هـ ونقطة ے هي نقطة التماس

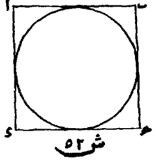
الزاوية المركزية هي الزاوية التي يكون رأسها بالمركز وضلعاها انصاف قطرين مثل الزاوية ح و ء

الزاوية المرسومة داخل الدائرة أو المحيطية هي ما كانت رأسها على المحيط وضلعاها وتران مثل زاوية ا ب ح من (شكل ٥١)

المثلث المرسوم داخل الدائرة هو ما كانت رؤسه على المحيط وأضلاعه أوتارا مثل ا ب ح ويقال على وجه العموم لاي شكل انه مرسوم داخل الدائرة متى كانت رؤسه على المحيط وأضلاعه أوتارا فيه

محيطا الدائرتين المتماسان هما اللذان لا يشتركان الا في نقطة واحدة فقط

الزاوية المرسومة خارج الدائرة هي ما كانت رأسها خارج الدائرة وضلعاها مماسين لمحيطها مثل زاوية ب (شكل ٥٢)



الشكل المرسوم خارج الدائرة ما كانت أضلاعه مماسة لمحيطها مثل ا ب ح ء ويقال للدائرة في هذه الحالة انها مرسومة داخل الشكل

نظـــــــرية

(٥٩) قاطع الدائرة لا يمكن أن يقطع محيطها في أكثر من نقطتين (شكل ٥٣)

أعنى أن القاطع هح لايمكن أن يقطع محيط دائرة و فى غير النقطتين ح و ى
اذ لو فرض أنه يقطع المحيط فى نقطة ثالثة مثل ل ووصلنا المستقيمات ول و وح و وى للزم أن تكون هذه المستقيمات كلها متساوية لانها اذن أنصاف أقطار لدائرة واحدة لمرورها جميعها بالمركز ولانتهاء كل منها بنقطة من نقط المحيط وهو باطل كما تقدم (٣٢ برهان الثالث نتيجة ٢)
ومانشأ هذا الامن فرض أن المستقيم يقطع المحيط فى نقطة ثالثة وبذا يثبت المطلوب

شكل ٥٣

تنبيه - يشاهد من الشكل المذكور أن الضلع حى < حو + وى أو حى < اب
أعنى أن أكبر المستقيمات التى يمكن رسمها داخل الدائرة هو القطر

نظـــــــرية

(٦٠) قطر الدائرة يقسمها هى ومحيطها الى قسمين متساويين
وذلك لانه لو طبق جزء الدائرة العلوى على جزئها السفلى حول القطر فانهما ينطبقان على بعضهما كمال الانطباق اذ لو فرض خلاف ذلك بأن كان بعض نقط أحد الجزأين وقع داخلا أو خارجا تكون ضرورة ابعاد هذه النقط عن المركز غير متساوية وهو مخالف لتعريف الدائرة وبناء عليه فلا بد من حصول الانطباق التام
وهذه نظرية يستفاد منها تساوى الدائرتين المرسومتين بنصفى قطرين متساويين لانه اذا وضع مركز أحدهما على مركز الاخرى فانه لا بد من انطباق جميع نقط محيطيهما على بعضهما تماما

الفصــــــل الثــانى

فى الاوتار والاقواس

نظـــــــرية

(٦١) فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية الاقواس المتساوية أوتارها متساوية وبالعكس
أى ان الاوتار المتساوية أقواسها متساوية (شكل ٥٤)

مثلا فى دائرة و اذا كان القوس اب = القوس حد يكون الوتر اب = الوتر حد
وبالعكس اذا كان الوتر اب = الوتر حد يكون القوس
اب = القوس حد

وللبرهنة على الشق الاول من هذه النظرية يمد من نقطة
ك وسط القوس ب ح القطر ك ع ثم يطبق نصف
المحيط ك ح ع على نصف المحيط ك ب ا ع فحيث ان
نقطة ك هى وسط القوس ح ب تقع نقطة ح على
نقطة ب وحيث ان القوس حد = القوس ب ا تقع نقطة د على نقطة ا وحينئذ
ينطبق الوتر حد على الوتر ب ا لاشتراكهما فى نقطتين ويكونان متساويين

شكل ٥٤

وللبرهنة على الشق الثانى يقال اذا وصلت أنصاف الاقطار وا و وب و وح و ود حدث
المثلثان ود ح و وب ا المتساويان لتساوى أضلاعهما الثلاثة المتناظرة وينتج من تساوى
المثلثين المذكورين تساوى الزاويتين د و ح و ب و ا فاذا انطبق نصف المحيط ك ح د ع
على النصف الآخر ك ب ا ع فالمثلثان ح و د و ب و ا ينطبقان على بعضهما ويتحد
الوتران حد و ب ا وبناء عليه يتساوى القوسان حد و ب ا وهو المراد

تنبيه — الشق الثانى من هذه النظرية لا يكون حقيقيا الا اذا كان كل واحد من القوسين
فى آن واحد إما أصغر أو أكبر من نصف المحيط

نظـــــــرية

(٦٢) فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية القوس الاكبر يكون وتره أكبر وبالعكس أى ان
الوتر الاكبر يكون قوسه أكبر هذا اذا لم يتجاوز القوس
نصف المحيط والا كان عكس ذلك (شكل ٥٥)

وللبرهنة على ذلك يؤخذ القوس ا م د مساويا للقوس
هـ ع الاصغر فيكون الوتر اد مساويا للوتر هـ ع (٦١)
ثم يوصل او و دو و طو فالمثلثان الحادثان ا و د
و ا و ط فيهما الضلع ا و مشترك والضلع و د = و ط
لكنه حيث كانت زاوية ا و ط أكبر من زاوية ا و د يكون الضلع ا ط أكبر من الضلع ا د
أو أكبر من المساوى له هـ ع وهو المراد

شكل ٥٥

واذا كان الوتر اط أكبر من الوتر هح يكون القوس امط أكبر من القوس هح اذلو فرض خلاف ذلك فاما أن يكون القوس امط مساويا للقوس هح أو أصغر منه فان كان الاول يكون الوتر اط مساويا للوتر هح وهو خلاف الفرض وان كان الثانى يكون الوتر اط أصغر من الوتر هح وهو المطلوب

نظـــــرية

(٦٣) نصف القطر العمودى على وتر ينصفه وينصف قوسه أيضا (شكل ٥٦)

أعنى اذا كان نصف القطر وح عمودا على الوتر اب يكون اد = دب والقوس اح = القوس حب

وللبرهنة على ذلك يقال ان المثلثين ودب و ودا القائمى الزاوية متساويان لوجود الضلع ود مشتركا بينهما ولتساوى الوتر وب بالوتر وا (٢٨) ومن تساويهما ينتج أن الضلع اد = الضلع دب ثم اذا وصل الوتران بح و حا فالمثلثان دبح و احد يكونان متساويين لاشتراك الضلع دح فيهما ولتساوى الضلع دب بالضلع دا كما سبق ذكره ولتساوى زاوية بدح بزاوية ادح وينتج من تساوى المثلثين أن الضلع اح يساوى الضلع حب ومن تساويهما يكون القوس اح = القوس حب وهو المطلوب

تنبيه — يعلم مما ذكر أن المستقيم وح متوفر فيه أربعة أمور وهى مروره بالمركز و بمنتصف الوتر و بمنتصف القوس وكونه عمودا على الوتر وتحقق وجود أمرين من هذه الامور الاربعة يستلزم تحقق الامرين الآخرين فيقال للمستقيم العمودى على وسط وتر انه يمر بالمركز و بمنتصف القوس وهكذا

نظـــــرية

(٦٤) فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية الاوتار المتساوية ابعادها عن المركز متساوية والاوتار المختلفة ابعادها عن المركز مختلفة وأطولها هو أقربها من المركز (شكل ٥٧)

أعنى اذا كان الوتر اب = الوتر حد يكون العمود وع مساويا للعمود وط واذا كان الوتر اه أكبر من الوتر حد يكون العمود ول أصغر من العمود وط

(برهان الاول) يوصل وا ، وح فالمثلثان القائما الزاوية وحا ، وطح متساويان لان فيهما الوتر وا = الوتر وح والضلع اع = الضلع حط (ش ٥٧)

(٦٣) وينتج من تساويهما أن وع = وط

(برهان الثانى) يؤخذ الوتر اب مساويا للوتر حى ثم يقال حيث كان ول عمودا على اهـ فيكون وى مائلا عليه وحينئذ يكون ول < وى أو ول < وع وهو المراد

نتيجـــة ـ يسهل البرهنة على عكس هذه القضية أى اذا تساوى بعدا وترين أو أكثر عن المركز تكون الاوتار متساوية واذا اختلفت أبعادها تكون مختلفة وأقصرها ما كان بعده عن المركز أكبر

نظـــــــرية

(٦٥) كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحـــدة يمكن أن يمر بها محيط دائرة واحـــد لا اثنان (شكل ٥٨)

(برهان الاول) يوصل المستقيمان اب ، اح ثم يقام العمودان ىهـ ، حط على منتصفى الوترين اب ، اح فيتقاطعان فى نقطـــة و لان العمودين المقـامين على مستقيمين متقاطعـــين يتقاطعان (٤٤) وتكون نقطة و مركز المحيط دائرة يمر بالنقط الثـلاثة المفروضة لان ابعادها وح ، وا ، وب عن نقطة و متساوية

(برهان الثانى) يقال لو فرض امكان مرور محيط آخر بالنقط الثلاثة المفروضة فان مركزه لابد وأن يوجـــد على كلا العمودين ىهـ ، حط المقامين على وسط الوترين (٦٣) اب ، اح ولما كان هذان العمودان لا يمكن أن يتقاطعا الا فى نقطة واحدة يكون مركز المحيط الثانى هو عين مركز الاول وحيث ان كل واحد منهما يجب أن يمر بالنقط الثلاثة ا ، ب ، ح فيكون نصف قطريهما واحدا وحينئذ فيتحدان معا ويصيران محيطا واحدا

(نتيجة ١) محيطا الدائرتين لا يمكن أن يتقاطعا فى أكثر من نقطتين لانهما لو اشـــتركا فى ثلاث نقط فانهما يتحدان معا ويصيران محيطا واحدا

(نتيجة ٢) اذا وصل المستقيم بح واقيم العمود لك على وسطه فانه لابد وان يمر بالمركز (٦٣) وحينئذ فالاعمدة الثلاثة المقامة على أواسط أضلاع مثلث تتقاطع فى نقطة واحدة تكون مركزا لمحيط الدائرة الذى يمر برؤسه

الفصــــــل الثـــالث

فى خواص المماس وعمود المنحنى

(٦٦) المستقيم العمودى على نهاية نصف قطر يكون مماسا لمحيط الدائرة أى لا يشترك مع المحيط الا فى نقطة واحدة و بالعكس (شكل ٥٩)

(برهان الاول) يقال لو فرض اشتراكهما فى نقطة ثانية مثل ط و وصل منها المستقيم وط لكان مائلا على اط ويكون وط أكبر من وا وهذا يستلزم أن تكون نقطة ط خارجة عن المحيط

(برهان الثانى) يقال حيث ان اط لا يشترك مع المحيط الا فى نقطة ا فكل نقطة خلافها مثل ط موجودة عليه تكون خارجة عن المحيط و يكون وط > وا وحينئذ فالبعد وا يكون أصغر الابعاد التى يمكن مدها من نقطة و الى المستقيم اط فيكون عمودا على اط وهو المطلوب

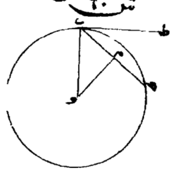
(نتيجة ١) من أى نقطة مثل ا مفروضة على محيط الدائرة لا يمكن أن يمد الا مماس واحد لا اثنان وذلك لانه لا يمكن من النقطة المذكورة الا اقامة عمود واحد اط على نصف القطر وا

(نتيجة ٢) المستقيمان المماسان لمحيط دائرة و الممدودان من نهايتى قطر واحد يكونان متوازيين لانهما عمودان على مستقيم واحد

(نتيجة ٣) المستقيمان المتوازيان والمماسان لمحيط دائرة يكون المستقيم المار بنقطتى تماسهما قطرا أى مارا بالمركز

نظـــــــرية

(٦٧) مماس محيط الدائرة فى نقطة ما يمكن اعتباره كأنه نهاية لاوضاع المستقيم القاطع المار بهذه النقطة (شكل ٦٠)



أعنى ان المماس ب ط لمحيط الدائرة و فى نقطة ب يمكن اعتباره كأنه نهاية لاوضاع القاطع ب ح المار بنقطة التماس ب وللبرهنة على ذلك يقال اذا انزل العمود وم على الوتر ح ب ثم فرض تحرك هـذا الوتر حول نقطة ب بحيث تقرب نقطة ح شيأ فشيأ من نقطة ب فان العمود وم يأخذ فى الازدياد شيأ فشيأ

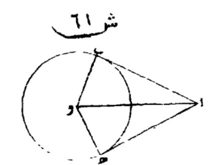
وحينئذ فعندما تتحد نقطة ح بنقطة ب ينطبق العمود وم على وب ويتحد الوتر بالمماس ويثبت المطلوب

فائدة — يمكن ان يستنتج مما ذكر تعريف عام لمماس أى منحن فيقال ان مماس أى منحن فى نقطة ما هو نهاية الاوضاع التى يأخذها قاطع مار بنقطة التماس يتحرك حولها بحيث تقرب نقطة تقاطعه الثانية بالمنحنى شيأ فشيأ من الاولى

نظـــــرية

(٦٨) اذا مد من نقطة خارجة عن محيط دائرة مماسان له فجزآهما المحصوران بين النقطة المفروضة ونقطتى التماس يكونان متساويين أعنى ان

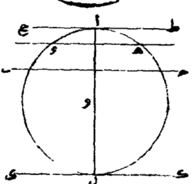
اب = اح (شكل ٦١)



وللبرهنة على ذلك يوصل وب , وح فيكونان عمودين بالتناظر على اب , اح (٦٦ عكس) ثم يوصل وا فالمثلثان الحادثان ا ب و , ا ح و القائما الزاوية متساويان لاشتراك الوتر او فيهما ولتساوى الضلع وح للضلع وب وينتج من تساويهما ان اب = اح وهو المراد

نظـــــرية

(٦٩) المستقيمان المتوازيان يحصران بينهما من المحيط قوسين متساويين (شكل ٦٢) فاذا فرضنا ان المستقيمين حب , هد متوازيان نقول ان القوس حه = القوس دب



وللبرهنة على ذلك يمد من نقطة و القطر وا عمودا عليهما فيتحصل بمقتضى ما سبق (٦٣) ان قوس اح = قوس اب وان قوس اه = قوس اد وبطرح المتساوية الثانية من الاولى يحدث هح = دب

أما اذا كان أحد المتوازيين مماسا للمحيط مثل ع ط فانه يوصل نصف القطر وا فيصير عمودا على كلا المتوازيين ويصير القوس حا مساويا للقوس اب

واذا كان المستقيمان المتوازيان مماسين للمحيط فان المستقيم ال الواصل بين نقطتى تماسهما يكون قطرا (٦٦ نتيجة ٣) وهو يقسم محيط الدائرة الى قسمين متساويين

(٧٠) عمود المنحنى فى نقطة ما هو العمود على المماس المار بهذه النقطة

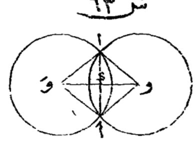
و ينتج من هذا التعريف ان أعمدة نقط محيط الدائرة هى انصاف أقطاره

الفصـــــل الرابــــع

فى أوضاع الدائرة

نظـــــرية

(٧١) اذا اشترك محيطا دائرتين فى نقطة خارجة عن المستقيم الواصل بين المركزين يلزم ان يشتركا فى نقطة أخرى مماثلة للاولى بالنسبة لعين المستقيم الواصل بين المركزين (شكل ٦٣)



أى اذا اشترك المحيطان و و وَ فى نقطة ا الخارجة عن المستقيم ووَ الواصل بين المركزين يلزم ان يشتركا فى نقطة أخرى مماثلة لنقطة ا بالنسبة للمستقيم ووَ

وللبرهنة على ذلك ينزل من نقطة ا العمود ااَ على ووَ ويؤخذ البعد ىاَ مساويا ىا فتسمى نقطة اَ الحادثة مماثلة لنقطة ا بالنسبة للمستقيم ووَ

ثم اذا وصل وا و واَ فهذان المستقيمان يكونان متساويين لانهما مائلان متساويى البعد بالنسبة لنقطة ى موقع العمود وى وحينئذ فمحيط الدائرة الذى مركزه و ونصف قطره وا يمر بنقطة اَ كما انه يمر بنقطة ا

وكذا لو وصل وَا و وَاَ كان هذان المستقيمان متساويين أيضا و يكون محيط الدائرة الذى مركزه وَ ونصف قطره وَا يمر بنقطة اَ وحينئذ تكون نقطة اَ مشتركة بين المحيطين

(نتيجة ١) اذا لم يشترك محيطا دائرتين الا فى نقطة واحدة بأن كانا متماسين فان نقطة التماس لا توجد الا على المستقيم الواصل بين المركزين وذلك لانه لو وجدت خارجة عنه للزم وجود نقطة اخرى مشتركة بين المحيطين وهو مغاير للفرض

(نتيجة ٢) اذا اشترك محيطا دائرتين فى نقطتين موجودتين على المستقيم الواصل بين المركزين

فانهما يتحدان معاوذلك لانهما فى هذه الحالة يكونان متحدين فى القطر وحينئذ فيكون مركزهما واحدا ونصف قطرهما واحدا أيضا

(نتيجة ٣) اذا اشترك محيطا دائرتين فى نقطتين احداهما على المستقيم الواصل بين المركزين والاخرى خارجة عنه فانهما يتحدان معاوذلك للزوم اشتراكهما فى نقطة ثالثة مماثلة للنقطة الثانية

نظـــــــــرية

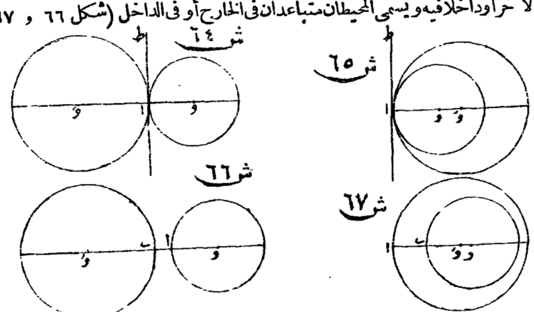
(٧٢) اذا اشترك محيطا دائرتين فى نقطتين فان المستقيم الواصل بين المركزين يكون عمودا على وسط الوتر المشترك بينهما (شكل ٦٣) وللبرهنة على ذلك يقال من المعلوم أن هاتين النقطتين لا يمكن أن يكونا على المستقيم الواصل بين المركزين (٧١ نتيجة ٢) بل تكونان خارجتين عنه وحيث ان نقطة و على بعدين متساويين من نقطتى ا , اَ فتوجد على العمود القائم على وسط اا َ ومثلها نقطة وَ وحينئذ فالمستقيم ووَ عمود على وسط اا َ وهو المراد

فائدة — محيطا الدائرتين الموجودان فى مستو واحد لا يمكن أن يكون لهما بالنسبة لبعضهما سوى خمسة أوضاع فقط وهى

أولا — اما أن يشتركا فى نقطتين ويقال لهما فى هذه الحالة متقاطعين (شكل ٦٣)

ثانيا — اما أن يشتركا فى نقطة واحدة فقط بمعنى أن يكونا متماسين وفى هذه الحالة يكون أحد المحيطين خارجا عن الآخر أو داخلا فيه ويقال لمحيطى الدائرتين متماسان خارجا أو داخلا (شكل ٦٤ و ٦٥)

ثالثا — اما أن لا يكون لهما نقط مشتركة وفى هذه الحالة يكون أحد المحيطين اما خارجا عن الآخر أو داخلا فيه ويسمى المحيطان متباعدان فى الخارج أو فى الداخل (شكل ٦٦ و ٦٧)



نظـــــرية

(٧٣) اذا رمزنا بالحرف د للبعد بين مركزى محيطى دائرتين وبالرمزين ر و رَ لنصفى قطريهما يقال

أولا – اذا تباعد المحيطان فى الخارج يكون د > ر + رَ

ثانيا – اذا تماسا فى الخارج يكون د = ر + رَ

ثالثا – اذا تقاطعا يكون د < ر + رَ و د > ر − رَ

رابعا – اذا تماسا فى الداخل يكون د = ر − رَ

خامسا – اذا تباعدا فى الداخل يكون د < ر − رَ

(برهان الاول) يقال من المعلوم ان البعد و وَ الكائن بين المركزين (شكل ٦٦) مركب من نصفى القطرين ر و رَ ومن المسافة اب وحينئذ يكون د > ر + رَ

(برهان الثانى) يقال من المعلوم ان نقطة تماس محيطى الدائرتين موجودة على المستقيم الواصل بين المركزين وحينئذ يكون هذا المستقيم مركبا من نصفى القطرين فقط أعنى يكون د = ر + رَ (شكل ٦٤)

(برهان الثالث) يقال من المعلوم انه متى تقاطع دائرتان فان نقطتى التقاطع تكونان خارج البعد بين المركزين وحينئذ فالمثلث و وَ ا يؤخذ منه ان د < ر + رَ و > ر − رَ (شكل ٦٣)

(برهان الرابع) يقال من المعلوم ان نقطة تماس محيطى دائرتين فى الداخل تكون على المستقيم الواصل بين المركزين وحينئذ يكون نصف القطر الاصغر جزأ من نصف القطر الاكبر ويكون د = ر − رَ (شكل ٦٥)

(برهان الخامس) يقال اذا تباعد محيطا دائرتين فى الداخل فان نصف القطر الاكبر يكون مركبا من البعد بين المركزين ومن نصف القطر الاصغر ومن بعد آخر اب وحينئذ يكون د < ر + رَ (شكل ٦٧)

نظـــــرية

(٧٤) عكس هذه القضايا الخمسة حقيقى وطريقة البرهنة عليها واحدة

مثلا اذا كان البعد بين المركزين أصغر من التفاضل الكائن بين نصفى القطرين يكون محيطا الدائرتين

متباعدين فى الداخل وللبرهنة على ذلك يقال ان لم يكونا متباعدين فى الداخل لكانا اما متباعدين فى الخارج أو متماسين خارجا أو داخلا أو متقاطعين وحيث ان قانون البعد بين المركزين فى كل واحدة من هذه الاحوال مخالف للفرض كان المحيطان متباعدين فى الداخل ضرورة وهو المطلوب

وعلى هذا يقاس الباقى

الفصل الخامس

فى مقادير الزوايا

(٧٥) قبل التكلم على مقادير الزوايا نذكر ما يأتى وهو من المعلوم

أولا — انه لقياس أى كية يبحث عن نتيجة تقديرها باخرى من نوعها معتبرة وحدة وهذه النتيجة تسمى نسبة فعلى هذا اذا اريد قياس مستقيم معلوم فانه يبحث عن النسبة الكائنة بينه وبين الوحدة التى من جنسه

ثانيا — اذا قيل ان النسبة بين مستقيمين معلومين هى كالنسبة بين عددين صحيحين مثل ٧ و ١٣ مثلا فانه يفهم منه انحصار مستقيم ثالث ٧ مرات فى احدهما و ١٣ مرة فى الثانى وان هذا المستقيم الثالث هو مقياس مشترك بين هذين المستقيمين وبناء على ذلك اذا اريد تعيين النسبة بين أى مستقيمين فانه يجب البحث عن مقياس مشترك بينهما ثم يقسم عدد مرات انحصاره فى احدهما على عدد مرات انحصاره فى الثانى كما سنذكره

مسئلة

(٧٦) المطلوب ايجاد المقياس المشترك بين مستقيمين معلومين (شكل ٦٨)

اذا كان المستقيمان المعلومان هما ا ب و حـ ء فاننا نجرى عليهما عملية مماثلة للعملية التى تحصل عند ايجاد القاسم المشترك الاعظم بين عددين

ش ٦٨

فيقال نطبق أصغرهما حـ ء على الاكبر ا ب عدة مرات صحيحة بقدر انحصاره فيه ولنفرض ان عدد ٣ هو عدد مرات الانحصار من ابتداء نقطة ا الى نقطة هـ وان هـ ب هو الباقى فيتحصل ان

$$ا ب = ٣ حـ ء + هـ ب \qquad (١)$$

ثم نطبق بعد ذلك الباقى هـ ب على المستقيم الاصغر حـ ء كما تقدم فنفرض ان حـ ء قد احتوى على الباقى هـ ب اربع مرات صحيحة زائدا الباقى ف ء فيحصل

حـ ء = ٤ هـ ب + ف ء (٢)

ثم نطبق هذا الباقى الثانى ف ء على الباقى الاول هـ ب كما ذكر من ابتداء نقطة هـ الى نقطة ع ونفرض انه بقى باق ثالث ع ب فيحدث

هـ ب = ف ء + ع ب (٣)

وأخيرا نطبق ع ب على ف ء ونفرض انحصاره فيه أربع مرات بدون باق فيحدث

ف ء = ٤ ع ب (٤)

ثم اذا ابدل فى المتساوية (٣) ف ء بمقداره من المتساوية (٤) يحدث

هـ ب = ٤ ع ب + ع ب = ٥ ع ب

ثم اذا ابدل فى المتساوية (٢) كل من هـ ب و ف ء بمقداريهما الناتجين يحدث

حـ ء = ٢٠ ع ب + ٤ ع ب = ٢٤ ع ب

واخيرا اذا ابدل فى المتساوية (١) كل من حـ ء و هـ ب بمقداريهما الاخيرين يحدث

ا ب = ٧٢ ع ب + ٥ ع ب = ٧٧ ع ب

ومما ذكر ينتج

أولا — ان الباقى الاخير ع ب هو المقياس المشترك بين المستقيمين ا ب و حـ ء

ثانيا — حيث كان هذا المقياس المشترك محصورا ٧٧ مرة فى المستقيم الاول و ٢٤ مرة فى الثانى كانت النسبة بين هذين المستقيمين المعلومين هى كالنسبة بين ٧٧ و ٢٤ وتبين على هذه الصورة $\frac{٧٧}{٢٤}$ أو $\frac{٢٤}{٧٧}$ فالصورة الاولى تدل على ان النسبة بين ا ب و حـ ء هى عين النسبة بين العددين ٧٧ و ٢٤ وأما الصورة الثانية فتدل بالعكس على ان النسبة بين حـ ء و ا ب هى عين النسبة بين العددين ٢٤ و ٧٧

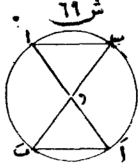
تنبيه — المقياس المشترك الذى علم ليس المقياس المشترك الوحيد بين هذين المستقيمين بل جميع قواسم هذا المقياس تكون ضرورة مقاييس مشتركة لهما الضرورة انحصارها فيهما مرارا صحيحة وعلى العموم متى وجد مقياس مشترك بين خطين كان لهما مقاييس مشتركة كثيرة جدا تعلم بواسطة قسمة هذا المقياس الى انصاف واثلاث وارباع وهكذا واكبر واحد من هذه المقاييس يقال له المقياس المشترك الاعظم

(٧٧) كل خطين مستقيمين يوجد لهما مقياس مشترك يقال لهما مستقيمان متناسبان وكل مستقيمين لم يكن بينهما مقياس مشترك يقال لهما غير متناسبين الا انه كلما ظهر باق وطبق على الباقى الذى قبله مرارا فانه لابد وأن يتوصل من توالى العمل الى باق صغير جدا غير محسوس بحيث يمكن اعتباره كلاشئ وبناء عليه فيمكن اعتبار أى مستقيمين كأنهما متناسبان دائما أعنى أنه يوجد بينهما مقياس مشترك سواء كان هذا المقياس حقيقيا أو تقريبيا

(٧٨) حيث ان أى قوسين من دائرة واحدة أو من دوائر متساوية يمكن انطباقهما على بعضهما فبناء عليه يمكن اجراء ما قيل فى المقياس المشترك بين مستقيمين على أى قوسين من دائرة واحدة أو من دوائر متساوية واذن فكل قوسين من هذا القبيل يمكن أن يوجد بينهما دائما مقياس مشترك اما حقيقى أو تقريبى

نظـــــــرية

(٧٩) فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية الاقواس المتساوية تكون زواياها المركزية متساوية وبالعكس أى اذا كانت الزوايا المركزية متساوية تكون أقواسها كذلك (شكل ٧٩)



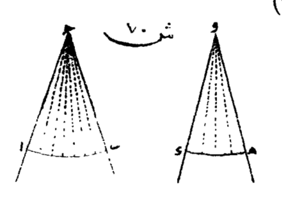
أعنى اذا كان القوس ا ب = القوس اَ بَ تكون زاوية او ب تساوى زاوية اَ و بَ وكذا اذا كانت الزاوية المركزية او ب تساوى الزاوية المركزية الاخرى اَ و بَ يكون قوس ا ب = قوس اَ بَ

(برهان الاول) يوصل الوتران ا ب و اَ بَ فمن حيث كان القوسان ا ب و اَ بَ متساويين يكون وتراهما كذلك وحينئذ فالمثلثان او ب و اَ و بَ يكونان متساويين لتساوى أضلاعهما الثلاثة وينتج من تساويهما أن زاوية او ب = زاوية اَ و بَ وهو المراد

(برهان الثانى) يقال ان المثلثين او ب و اَ و بَ متساويان لتساوى ضلعين والزاوية المحصورة بينهما من أحدهما لنظائرها من الثانى وينتج من تساويهما أن الضلع ا ب = الضلع اَ بَ وحيث كان هذان الوتران متساويين يكون قوساهما كذلك أعنى أن القوس ا ب = القوس اَ بَ وهو المطلوب

نظـــــرية

(٨٠) فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية النسبة بين أى زاويتين مركزيتين هى دائما كالنسبة بين قوسيهما الواقعين بين ضلعيهما (شكل ٧٠)



ليكن احب و دهو زاويتين مركزيتين فى دائرتين متساويتين ولنفرض أولا وجود مقياس مشترك بين قوسيهما اب و هد وأنه منحصر ٧ مرات فى القوس اب و ٤ مرات فى القوس ده وحينئذ تكون النسبة بين هذين القوسين هى $\frac{٧}{٤}$ (٧٦ نتيجة ٢) فاذا وصل الآن جميع نقط التقاسيم بمركزى الدائرتين يشاهد أن الزاوية احب انقسمت الى سبع زوايا مركزية متساوية لتساوى أقواسها (٧٩) المحصورة بين أضلاعها وأن الزاوية دوه انقسمت الى أربع زوايا مركزية متساوية وتكون النسبة بين الزاويتين هى $\frac{٧}{٤}$ وهى عين النسبة الكائنة بين القوسين

فاذا لم يوجد بين القوسين مقياس مشترك بأن كانا غير متناسبين يقسم القوس ده الى ثلاثة أقسام متساوية (شكل ٧١)

شكل ٧١

ثم نفرض أن القوس اب يشتمل على أربعة من هذه الاقسام وعلى الجزء بك الاصغر من أى واحد من هذه الاقسام فتكون النسبة بين القوسين اب و ده أكبر من $\frac{٤}{٣}$ وأصغر من $\frac{٥}{٣}$

ثم اذا وصل بين المركزين ح و و وبين نقط التقاسيم بمستقيمات يشاهد أن الزاوية دوه انقسمت الى ثلاث زوايا مركزية متساوية وأن الزاوية احب تشتمل على أربع من هذه الزوايا وعلى الزاوية كحب الاصغر من أى واحدة منها وحينئذ تكون النسبة بين الزاويتين محصورة بين الكسرين $\frac{٤}{٣}$ و $\frac{٥}{٣}$ وبناء عليه تكون النسبتان $\frac{اب}{ده}$ و $\frac{احب}{دوه}$ محصورتين بين الكسرين $\frac{٤}{٣}$ و $\frac{٥}{٣}$

لكنه اذا قسم القوس ده الى عشرة أقسام أو مائة جزء أو الف جزء أو ... الخ متساوية

فانه يبرهن كما سبق بأن النسبتين السابقتين محصورتين بين عددين متواليين من أجزاء العشرات أو من أجزاء المئين أو من أجزاء الالوف أو الخ وحينئذ فتكون هاتان النسبتان متساويتين حيث انه قد شوهد أنهما محصوران بين عددين يمكن أن يؤول الفرق بينهما الى كمية صغيرة جدا على قدر ما يراد

و ينتج مما ذكر أنه اذا أريد ايجاد النسبة بين زاويتين فانه يستعوض ذلك بالبحث عن النسبة بين قوسيهما المحصورين بين أضلاعهما باعتبار رأسيهما مركزين لهما وحينئذ اذا اعتبر أحد القوسين وحدة للاقواس وزاويته وحدة للزوايا كانت الزاوية الاخرى مشتملة على وحدة الزوايا بقدر اشتمال قوسها على وحدة الاقواس ولذا يقال على وجه العموم ان الزاوية تقاس بقوسها المحصور بين ضلعيها الذى مركزه رأسها

(٨٠) وقد اتفقوا على جعل الزاوية القائمة وحدة للزوايا لكون مقدارها ثابتا وعلى اعتبار قوسها وهو ربع المحيط الذى مركزه رأسها وحدة للاقواس بحيث لو أريد تقدير أى زاوية فانه يقدر قوسها بربع المحيط

والطريقة الآتية المبنية على تقسيم المحيط هى المستعملة فى التقدير

فيقسم محيط الدائرة الى ٣٦٠ جزأ متساوية تسمى درجا وتنقسم الدرجة الى ٦٠ دقيقة والدقيقة الى ٦٠ ثانية وهكذا وحينئذ فتقدر الزاوية بمقدار الدرج والدقائق والثوانى المشتمل عليه قوسها ولا فرق فى نسبة عدد الدرج والدقائق والثوانى وهكذا للقوس أو للزاوية فيقال ان قوس كذا أو زاوية كذا تشتمل مثلا على عشر درجات وخمس عشرة دقيقة وسبع ثوان ولاجل الاختصار فى الكتابة يرمز بهذه العلامة (°) لبيان الدرجة وبهذه (′) لبيان الدقيقة وبهذه (″) لبيان الثانية وهكذا

فالزاوية أو القوس الذى مقداره ١٥ درجة و٢٧ دقيقة و١٩ ثانية يكتب هكذا ١٩″ ٢٧′ ١٥°

والاعمال التى تقدمت فى علم الحساب على الاعداد المتنسبة يجرى تطبيقها هنا على الدرج والدقائق والثوانى بدون فرق ولنمثل لذلك فنقول

أولا – المطلوب تعيين مقدار الزاوية الثالثة من مثلث اذا علم زاويتاه الأخريان احداهما تساوى ١٩″ ٢٥′ ٦٠° والثانية تساوى ٤٧″ ٥٣′ ٨٠° يقال حيث كان مجموع زوايا المثلث مساويا قائمتين أو ١٨٠° كان مقدار الزاوية المطلوبة يتعين بواسطة طرح مجموع الزاويتين المعلومتين من ١٨٠° هكذا

٥٤″ ٤٠′ ٣٨° = ٦″ ١٩′ ١٤١° − ١٨٠° = [(٤٧″ ٥٣′ ٨٠°) + (١٩″ ٢٥′ ٦٠°)] − ١٨٠°

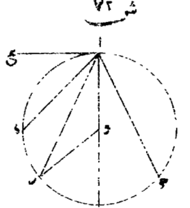
ثانيا — المطلوب حساب الدرج الموجود فى زوايا شكل كثير الاضلاع عدد أضلاعه ٢٥ ولذلك يقال ان عدد الزوايا القائمة الموجودة فى هذا الشكل مساوالى (٢٥ — ٢) ٢ = ٤٦ وبضرب هذا العدد فى ٩٠ يحدث ٤١٤٠°

ويوجد طريقة اخرى جديدة اعشارية فى تقسيم محيط الدائرة خلاف الطريقة السابقة وهى تقسيمه الى ٤٠٠ جزء متساوية يسمى واحدها غرادة والغرادة تنقسم الى ١٠٠ دقيقة والدقيقة الى ١٠٠ ثانية وهكذا وهذه الطريقة وان كان يسهل الحساب بواسطتها لكن لازال استعمال الطريقة القديمة جاريا وهو الذى نتبعه فى هذا المختصر

نظـــــــرية

(٨٢) معيار الزاوية المحيطية هو نصف القوس المحصور بين ضلعيها (شكل ٧٢)

ولهذه الزاوية جملة أوضاع يحتاج الامر لمعرفتها



(الوضع الاول) أن يمر أحد ضلعيها بالمركز مثل زاوية ب ا ح فبتوصيل نصف القطر ب و تكون الزاوية ب و ح الخارجة عن المثلث ب و ا مساوية الى و ب ا + و ا ب وحيث ان هاتين الزاويتين متساويتان لكون المثلث متساوى الساقين تكون زاوية ب و ح = ٢ ب ا ح ولما كانت زاوية ب و ح تقاس بالقوس ب ح فتكون زاوية ب ا و التى هى نصفها تقاس بنصف القوس ب ح

(الوضع الثانى) ان يكون المركز بين الضلعين مثل زاوية ب ا هـ وفى هذه الحالة تكون زاوية ب ا هـ = ب ا ح + ح ا هـ وحيث ان كل واحدة من هاتين الزاويتين تقاس بنصف القوس المحصور بين ضلعيها كانت زاوية ب ا هـ تقاس بنصف مجموع القوسين المذكورين أو بنصف القوس ب هـ المحصور بين ضلعيها

(الوضع الثالث) ان يكون المركز خارجا عن انفراج الزاوية مثل زاوية ب ا د وفى هذه الحالة تكون هذه الزاوية هى الفرق بين الزاويتين ح ا د , ح ا ب وتقاس حينئذ بنصف ب د وهو الفرق بين القوسين ح د , ب ح

(الوضع الرابع) ان يكون أحد ضلعى الزاوية مماسا للمحيط مثل الزاوية هـ ا ع فان معيارها

لا يزال مساويا لنصف القوس ا ى هـ وذلك لانه اذا فرضت ان الزاوية المفروضة هى زاوية هـ ا ى ثم فرض ان الضلع هـ ا ثابت وان الضلع ا ى متحرك حول نقطة ا بحيث تقرب نقطة ى شيأ فشيأ من نقطة ا فان جميع الزوايا المتوالية الحادثة تقاس بانصاف الاقواس المحصورة بين أضلاعها وبالجملة فعندما تصل نقطة ى الى نقطة ا يكون معيار الزاوية هـ ا ع مساويا لنصف القوس ا ى هـ

شكل ٧٣

وينتج من ذلك (شكل ٧٣)

أولا — ان الزوايا هـ ل ع و هـ ح ع و هـ ى ع و ى هـ ع التى رؤسها على المحيط وأضلاعها واصلة الى نهايتى قوس واحد تكون كلها متساوية لاشتراكها فى معيار واحد وهو نصف القوس هـ ا ع

ويمكن التعبير عن هذه النتيجة بطريقة مختصر فيقال ان جميع الزوايا المرسومة فى قطعة واحدة كلها متساوية

ثانيا — ان الزاوية ح ا ب التى رأسها بالمحيط وضلعاها ا ح و ا ب واصلان الى نهايتى القطر ب ح هى زاوية قائمة لان معيارها نصف القوس المحصور بين ضلعيها وحيث كان القوس مساويا لنصف محيط فيكون معيارها مساويا لربع محيط وحينئذ فكل زاوية مرسومة فى قطعة مساوية لنصف الدائرة تكون زاوية قائمة

ثالثا — ان الزاويتين المتقابلتين فى أى شكل رباعى مرسوم داخل الدائرة متكاملتان لان مجموع معياريهما مساو لنصف محيط

نظـــــــرية

(٨٣) معيار الزاوية الداخلة أى التى رأسها بين المحيط والمركز يساوى نصف مجموع القوسين المحصور احدهما بين ضلعيها والثانى بين امتدادهما أعنى ان زاوية ب ا ح $= \frac{ب ح + هـ ى}{٢}$ (شكل ٧٤)

شكل ٧٤

وللبرهنة على ذلك يوصل المستقيم ى ح فالزاوية ب ا ح الخارجة عن المثلث ا ى ح تساوى ى + ح أو ب ا ح $= \frac{ب ح}{٢} + \frac{هـ ى}{٢} = \frac{ب ح + هـ ى}{٢}$ وهو المطلوب

نظـــــــرية

(٨٤) الزاوية الخارجة أى التى رأسها خارج المحيط تقاس بنصف الفرق بين القوسين المحصورين بين ضلعيها (شكل ٧٥)

شكل ٧٥

أعنى ان زاوية ب ا ح = $\frac{\text{ب ح} - \text{هـ د}}{٢}$

وللبرهنة على ذلك يقال اذا وصل المستقيم ب د حدث ان زاوية ب د ح = ب + ا أو ا = ب د ح — ب أو زاوية ا = $\frac{\text{ب ح}}{٢} - \frac{\text{هـ د}}{٢} = \frac{\text{ب ح} - \text{هـ د}}{٢}$ وهو المراد

نتيجـــة — اذا كان أحد ضلعى الزاوية الخارجة أو كلاهما مماسا للمحيط فان معيار الزاوية لايزال مساويا لنصف الفرق بين القوسين المحصورين بين ضلعيها (شكل ٧٦)

فالزاوية ع ا م = $\frac{\text{م ح} - \text{ح ع}}{٢}$

شكل ٧٦

لانه اذا وصل ح م حدث

ع ح م = م + ا أو ا = ع ح م — م

أو ا = $\frac{\text{م ح}}{٢} - \frac{\text{ح ع}}{٢} = \frac{\text{م ح} - \text{ح ع}}{٢}$

والزاوية د ا ع = $\frac{\text{ب م ح} - \text{ب ع ح}}{٢}$

وذلك لانه اذا وصل ب ح حدث أن

د ب ح = ب ح ا + ا أو ا = د ب ح — ب ح ا = $\frac{\text{ب م ح}}{٢} - \frac{\text{ب ع ح}}{٢} = \frac{\text{ب م ح} - \text{ب ع ح}}{٢}$

فائدة — بالتأمل فى (الشكل ٧٦) يعلم أن الزاويتين د ب ح و ع ح ب متساويتان لتساويهما فى المعيار وحينئذ تكون الزاويتان ا ب ح و ا ح ب متساويتين ويكون المثلث ا ب ح متساوى الساقين والعمود النازل من رأسه على قاعدته يمر طبعا بوسطها وبناء عليه فانه لابد وأن يمر بالمركز ومن ذلك تنتج هذه القاعدة وهى

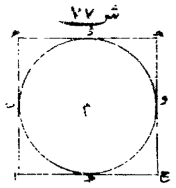
كل زاوية مرسومة خارج الدائرة وضلعاها مماسان لمحيطها فان جزئيهما المحصورين بين نقطتى التماس و رأسها متساويان وأن المستقيم المنصف لها يمر بمركز الدائرة و يكون عمودا على وسط الوتر الواصل بين نقطتى التماس

(نتيجــة ١) كل نقطة مثل ا خارج محيط الدائرة و يمكن أن يمد منها مماسان له متساويان وذلك لانه اذا فرض أن ا ب مماس لمحيط الدائرة و وصل نصف القطر و ب كان ضرورة عمودا

على المماس ثم اذا تصوّرنا تدوير نصف المحيط الاعلى حول القطر م ع فان نقطة ب تنطبق طبعا على نقطة ح ويأخذ المماس اب الوضع اح وأما نصف القطر وب فانه يبقى دائما عموديا على اب فى أثناء الدوران ويأخذ الوضع وح العمودى على اح وبذلك يكون اح مماسا آخر وهو مساو اب كما تقدم

(نتيجة ٢) مجموع أى ضلعين متقابلين من أى شكل رباعى مرسوم على الدائرة يساوى مجموع الضلعين الآخرين من (شكل ٧٧) أعنى يكون

اح + هع = اع + هح



وذلك لان

اب = اط ، بح = حى ، وه = هى

، وع = عط

وبجمع هذه المتساويات على بعضها يحدث

اب + بح + هو + وع = اط + حى + هى

+ عط أو اح + هع = اع + حه وهو المطلوب

الفصـــــل السادس

فى الدعاوى العمليـــة

(٨٥) حل أى مسئلة عملية بواسطة المسطرة والبرجل هو بيان توالى الاعمال التى تجرى بواسطة الخطوط أو الدوائر ليعقبها حل المسئلة المفروضة

والسير العام الذى يجب اتباعه فى ذلك هو

أولا — أن يفرض أن المسئلة محلولة ويرسم الحل المطلوب

ثانيا — أن يجتهد دائما فى البحث عن النقط التى تكفى معرفتها لاتمام الحل مع السهولة باعتبار أنها مجهولة مع الاهتمام دائما فى تنقيص عددها على قدر الامكان حتى انها تجعل واحدة فقط ان أمكن ذلك

ثالثا — أن يجتهد فى أن يبرهن بناء على معالم المنطوق أو فروضه بأن كل واحدة من هذه النقط المجهولة اما موجودة على خطين مستقيمين معلومين يتأتى رسمهما او على مستقيم ومحيط دائرة أو على محيطى دائرتين كذلك

رابعا — أن يجتهد فى ترجيع تعيين النقط المجهولة الى الحل الذى أجرى للمسئلة
ولنبدأ بحل بعض مسائل بسيطة يتوصل بها الى حل مقدار عظيم من المسائل الاخر فنقول

فى رسم الخطوط المتعامدة

دعوى عمليه

(٨٦) طريقة اقامة عمود على وسط مستقيم معلوم (شكل ٧٨) يفرض لذلك أن المسئلة محلولة وأن حء هو العمود المطلوب ثم يقال من المعلوم أن أى نقطتين مثل ح و ء كافيتان لتعيينه وحيث انه محل هندسى للنقط المتساوية البعد عن النقطتين ا و ب فكل نقطة مثل ح توجد فى تقاطع محيطى الدائرتين المتساويتين اللتين مركزاهما ا و ب ومثلها نقطة ء ولما كان من اللزوم تقاطع محيطى الدائرتين فيكون اب < اح + بح أو اب < ٢اح أو اح > $\frac{اب}{٢}$

شكل ٧٨

ومن ذلك تنتج طريقة الحل وهى

يجعل نهايتا المستقيم المعلوم مركزين وبنصف قطر أكبر من نصفه يرسم محيطا دائرتين متقاطعان فالوتر المشترك بينهما يكون هو العمود المطلوب

نتيجـــة — يمكن استعمال عين الاعمال السابقة فيما اذا أريد تنصيف مستقيم معلوم

دعوى عمليـــة

(٨٧) طريقة مد مستقيم عمودى على آخر معلوم من نقطة مفروضة

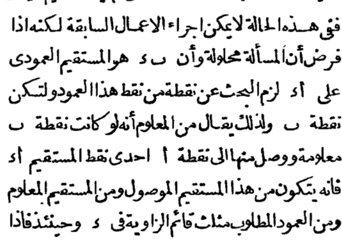
أولا — اذا كانت النقطة ء المعلومة موجودة على المستقيم اب (شكل ٧٩) وفرض أن المسألة محلولة وأن ءح هو العمود المطلوب يلزم أن نبحث عن تعيين نقطة أخرى من نقط العمود المطلوب ولتكن ح مثلا

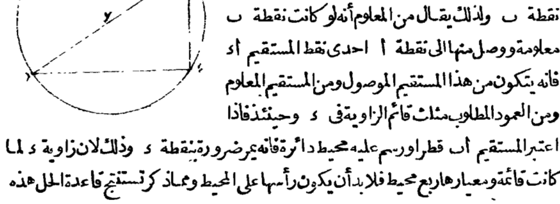
شكل ٧٩

وللوصول الى ذلك يقال لو أخذ البعدان د ا و د ب بجانبي نقطة د بحيث يكونان متساويين لوجدت نقطة ح على بعدين متساويين من هاتين النقطتين وبناء عليه فتوجد في تقاطع محيطي الدائرتين المتساويتين اللتين مركزاهما ا و ب بنصف قطر كاف لتقاطعهما ومن ذلك تنتج طريقة الحل الآتية وهي

يؤخذ بجانبي نقطة د بعدان متساويان د ا و د ب ثم تجعل كل واحدة من النقطتين ا و ب مركزا وبنصف قطر أكبر من ا د يرسم قوسان من محيطي دائرتين فيتقاطعان في نقطة مثل ح ثم يوصل ح د فيكون هو العمود المطلوب

ثانيا ــ اذا وجدت نقطة د على نهاية مستقيم لا يمكن مده (شكل ٨٠)

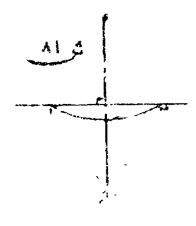




في هذه الحالة لا يمكن اجراء الاعمال السابقة لكنه اذا فرض أن المسألة محلولة وأن ب د هو المستقيم العمودي على ا د لزم البحث عن نقطة من نقط هذا العمود ولتكن نقطة ب ولذلك يقال من المعلوم أنه لو كانت نقطة ب معلومة ووصل منها الى نقطة ا احدى نقط المستقيم ا د فانه يتكون من هذا المستقيم الموصول ومن المستقيم المعلوم ومن العمود المطلوب مثلث قائم الزاوية في د وحينئذ فاذا اعتبر المستقيم ا ب قطرا ورسم عليه محيط دائرة فانه يمر ضرورة بنقطة د وذلك لان زاوية د لما كانت قائمة ومعيارها ربع محيط فلا بد أن يكون رأسها على المحيط ومما ذكر تستنتج قاعدة الحل هذه

تؤخذ نقطة ما اختيارية مثل ح خارج المستقيم ا د ثم تجعل مركزا وبنصف قطر مساو ح د يرسم محيط دائرة يقطع ا د في نقطة ا فاذا وصل ا ح ومد على استقامته حتى يقطع محيط الدائرة في نقطة ب تكون هي نقطة ثانية من العمود ويكون ب د هو العمود المطلوب

ثالثا ــ اذا فرضت نقطة د خارج المستقيم ا ب (شكل ٨١)



وأن د ح هـ هو العمود المطلوب

فلتعيين نقطة أخرى من نقط العمود مثل نقطة هـ تجعل نقطة د مركزا وبنصف قطر ما يرسم قوس محيط دائرة بحيث يقطع المستقيم المعلوم في نقطتين مثل ا و ب وحينئذ تكون نقطة هـ المطلوب تعيينها موجودة على بعدين متساويين من نقطتي ا و ب وتتعين اذن كما

تقدم بتقاطع قوسى محيطى دائرتين متساويتين مرسومتين بالنقطتين ا و ب ومن ذلك تنتج طريقة الحل هذه

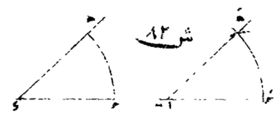
تجعل نقطة د مركزا وبنصف قطر كاف يرسم قوس محيط دائرة يقطع المستقيم المعلوم فى نقطتين مثل ا و ب ثم تجعل كل واحدة من هاتين النقطتين مركزا وبنصف قطر أكبر من نصف اب يرسم قوسان من محيطى دائرتين فيتقاطعان فى نقطة مثل هـ ويكون دحه هو العمود المطلوب

فى رسم الخطوط المتوازية

قبل الدخول فى رسم الخطوط المتوازية نذكر هذه الدعوى العملية

دعوى عمليـــة

(٨٨) طريقة مد مستقيم يصنع مع مستقيم معلوم من نقطة مفروضة عليه زاوية تساوى زاوية معلومة (شكل ٨٢)



لتكن د هى الزاوية المعلومة وا هى النقطة المفروضة على المستقيم بح فنفرض أن المسئلة محلولة وأن المستقيم اهَ هو المستقيم المطلوب وحينئذ فيحتاج الامر الى تعيين نقطة أخرى من هذا المستقيم مثل نقطة هَ وللوصول الى ذلك يقال

اذا جعل كل واحدة من النقطتين ا و د مركزا وبيعد اختيارى رسم قوسا محيطى دائرتين متساويتين فمن حيث ان الزاويتين ا و د يجب أن تكونا متساويتين وهما مركزيتان فى فى دائرتين متساويتين فيكون قوساهما متساويين ووتراهما كذلك وحينئذ فتوجد نقطة هَ فى تقاطع القوس حَهَ بمحيط الدائرة الذى مركزه حَ ونصف قطره مساو للوتر حه ومن ذلك تنتج طريقة الحل هذه تجعل نقطة د مركزا وبنصف قطر اختيارى يرسم القوس حه ثم تجعل نقطة ا مركزا وبعين نصف القطر المذكور يرسم قوس غير محدود ثم تجعل نقطة حَ مركزا وبنصف قطر مساو للوتر حه يرسم قوس من محيط دائرة يقطع القوس حَهَ فى نقطة هَ فاذا وصل هَا تكون زاوية هَاحَ هى الزاوية المطلوبة

دعوى عمليـــة

(٨٩) طريقة مد مستقيم يوازى آخر معلوما من نقطة ما خارجة عنه

الحل الاول (شكل ٨٣)

شكل ٨٣

اذا كانت ا هى النقطة المعلومة وكان ب ح هو المستقيم المعلوم وفرضنا ان المسألة محلولة وأن ا د هو المستقيم الموازى المطلوب لزمنا تعيين نقطة أخرى مثل د من المستقيم الموازى المذكور

للوصول الى ذلك يقال اذا وصل بين نقطة ا المفروضة و بين احدى نقط المستقيم المعلوم ولتكن ح كانت زاوية ا ح ب مساوية لزاوية ح ا د لكونهما متبادلتين داخلتين وحينئذ رجع الامر الى رسم زاوية ح ا د مساوية لزاوية ا ح ب كما مر فى نمرة ٨٨

الحل الثانى (شكل ٨٤)

شكل ٨٤

اذا فرض أن المسألة محلولة وأن ا د هو المستقيم الموازى المطلوب ورسم محيط دائرة مارا بنقطة ا وقاطعا للمستقيم ب ح فمن حيث ان القوس ح د يجب أن يكون مساويا للقوس ا ب فيكون وتراهما كذلك وحينئذ فتتعين نقطة د بتقاطع المحيط الاول بمحيط آخر مركزه نقطة ح ونصف قطره مساو لوتر القوس ا ب

الحل الثالث (شكل ٨٥)

يستعمل احيانا لحل هذه المسألة المثلث الخشبى وهو قطعة من الخشب الرقيق على هيئة مثلث احدى زواياه قائمة بواسطة انزلاقه على مسطرة بان يطبق أحد ضلعى القائمة من المثلث المذكور على المستقيم المعلوم وتطبق حافة المسطرة على الضلع الثانى للزاوية القائمة ثم تثبت المسطرة باليد و يزلق المثلث على حافتها حتى يمر الضلع الذى كان منطبقا على الضلع ب ح بالنقطة ا فاذا رسم مستقيم بطول حافة هذا الضلع كان موازيا للمستقيم ب ح لان الزوايا المتناظرة الحادثة من المستقيمين المذكورين ومن حافة المسطرة متساوية لكونها قائمة

شكل ٨٥

فى تنصيف زاوية أوقوس معلوم

دعوى عمليـــة

(٩٠) طريقة تنصيف زاوية أوقوس معلوم (شكل ٨٦) ش ٨٦

أولا — اذا فرض أن اوب هى الزاوية المعلومة وأن المسئلة محاولة وأن وءح هو المستقيم المنصف لها فاذا أريد تعيين نقطة أخرى من المستقيم المنصف يقال اذا جعلت نقطة و مركزا ورسم قوس بنصف قطر اختيارى فانه يقطع الضلعين او و وب فى نقطتين ويكون المستقيم المنصف مارا ضرورة بمنتصف القوس اب المحصور بين ضلعى الزاوية وعمودا على منتصف الوتر اب وحينئذ لتعيين نقطة ح من المستقيم المنصف يجرى العمل كما أجرى فى نمرة ٨٦

ثانيا — اذا فرض أن اب قوس معلوم يراد تنصيفه يقال اذا تصورنا وجود وتره فان العمود المقام على منتصفه يمر بمنتصف القوس أيضا وحينئذ فقد رجع الامر الى اجراء اعمال نمرة ٨٦

(٩١) لما كان يطلب احيانا رسم محيط دائرة يمر بثلاث نقط معلومة ليست على استقامة واحدة أوتعيين مركز محيط دائرة أوقوس معلوم ناسب ذكر العملية الآتية

دعوى عمليـــة

(٩٢) — طريقة امرار محيط دائرة بثلاث نقط معلومة ليست على استقامة واحدة (شكل ٨٧)

اذا كانت النقط الثلاثة هى ا و ب و ح وفرض أن المسئلة محاولة وأن ابح هو محيط الدائرة المطلوب لزم البحث عن المركز و

وللوصول الى ذلك يقال ان المركز المذكور يوجد على العمود القائم على وسط الوتر اب (٦٣ تنبيه) وكذا يوجد على العمود القائم على وسط الوتر ب ح ولما كان هذان العمودان لابد أن يتقاطعا (٤٩) فبناء عليه يرجع الامر الى اجراء اعمال نمرة ٨٦ مرتين ليتوصل الى المطلوب

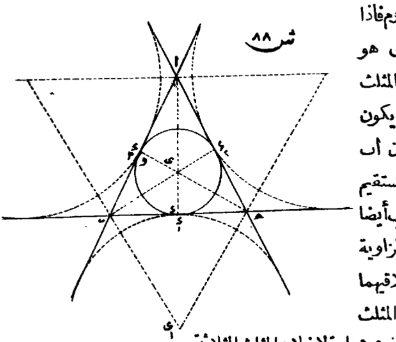
ش ٨٧

نتيجـــة ـ اذا أريد تعيين مركز محيط دائرة معلوم أو مركز قوس معلوم يؤخذ عليه ثلاث نقط وتجرى الاعمال السابقة

فى رسم المستقيمات المماسة لمحيطات الدوائر

دعوى عمليـــة

(٩٣) طريقة رسم محيط دائرة يمس أضلاع مثلث معلوم (شكل ٨٨)



ليكن ا ب ح هو المثلث المعلوم فاذا فرض أن المسئلة محلولة وأن ى هو محيط الدائرة الذى يمس أضلاع المثلث فمن حيث ان المركز ى يجب أن يكون على بعدين متساويين من الضلعين ا ب و ا ح فيوجد ضرورة على المستقيم المنصف لزاوية ا ولهذا السبب أيضا يوجد على المستقيم المنصف لزاوية ب واذن فهو موجود فى نقطة تلاقيهما ثم اذا نصفت الزوايا الخارجة من المثلث فانه يتوصل الى محيطات لدوائر اخرى مماسة لاضلاع المثلث الثلاثة

دعوى عمليـــة

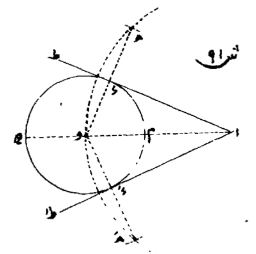
(٩٤) طريقة مد مستقيم مماس لمحيط دائرة من نقطة معلومة ولذلك حالتان

شر ٨٩

الاولى ـ اذا كانت النقطة المعلومة ا موجودة على محيط الدائرة (شكل ٨٩) فمن حيث ان المماس الذى يمر بنقطة ا يجب أن يكون عمودا على نصف القطر المار بهذه النقطة التى هى نقطة التماس فقد آلت المسئلة الى طريقة اقامة عمود على مستقيم من نقطة مفروضة عليه نمرة ٨٧

الحالة الثانية — اذا كانت النقطة ا المعلومة موجودة خارج المحيط وفرض ان المسئلة محلولة وان ى هى النقطة المجهولة (شكل ٩٠) التى يجب البحث عنها يقال ان زاوية ى قائمة فتكون مرسومة فى نصف محيط قطره او وحينئذ فقد آلت المسئلة الى نمرة ٨٦ وهى تنصيف المستقيم او وأما نقطة ى فانها تكون موجودة فى تقاطع محيطى الدائرتين ح و و

حل ثان — اذا كانت ا هى النقطة المفروضة (شكل ٩١) وان اى هو المماس المطلوب واريد تعيين نقطة التماس ى يمدّ نصف القطر وى بمقدار ىھ = ىو ومن المعلوم ان معرفة نقطة ھ تكفى لمعرفة نقطة ى



ثم ان نقطة ھ توجد على محيط الدائرة الذى مركزه و ونصف قطره مساو م ن وكذا توجد على محيط الدائرة الذى مركزه ا ونصف قطره او وبناء عليه فتوجد فى تقاطعهما

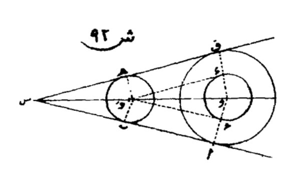
تنبيه — عندما تكون نقطة ا خارجة عن المحيط فانه يسهل أولا مشاهدة توفر شروط تقاطع محيطى الدائرتين لان البعد بين المركزين فى كلا الشكلين ٩٠ و ٩١ هو أحد نصفى القطرين فيكون ضرورة أصغر من مجموع نصفى القطرين وأكبر من فاضلهما وثانيا وجود مماسين فى كل واحد من الحلين

دعوى عمليـــــة

(٩٥) طريقة مدّ مماس لمحيطى دائرتين لذلك حالتان

الاولى — فى التماس من الخارج (شكل ٩٢) اذا كان و و وَ محيطى الدائرتين المراد مدّ مماس لهما من الخارج وفرض ان المسئلة محلولة وان اب هو المماس كان النقطتان ا و ب هما المقتضى تعيينهما

فاذاوصل و ا ، وَ ب ومدمن نقطة وَ المستقيم وَ حـ موازيا للمستقيم ا ب حتى يقابل
المستقيم ا و في نقطة حـ كان تعيين

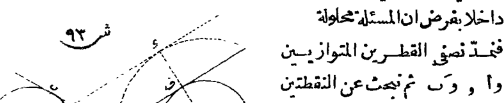


نقطة حـ كافيا لتعيين النقطتين
ا ، ب وذلك لانه اذا وصل و حـ
ومدّ على استقامته فانها تعين نقطة ا
وكذا حيث ان كلا من و ا ، وَ ب
عمود على وَ حـ فيكونان متوازيين
فاذا مدّ حينئذ من نقطة وَ المستقيم وَ ب موازيا الى و ا فانها تعين أيضا نقطة ب

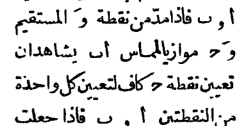
وللوصول الى تعيين نقطة حـ يقال اذا جعلت نقطة و مركزا و بنصف قطر يساوي و ا ــ وَ ب
رسم محيط دائرة فانه يكون مماسا للمستقيم وَ حـ العمودي على نصف القطر و ا وحينئذ
تتعين نقطة حـ بواسطة رسم مماس من نقطة وَ للمحيط و حـ الذي مركزه و ونصف قطره
و ا ــ وَ ب

وبالتأمل يعلم ان لهذه المسئلة حلين

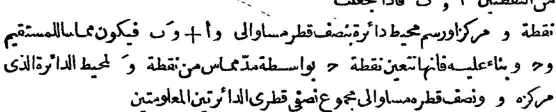
الحالة الثانية ــ في التماس من الخارج (شكل ٩٣) ليكن حرفا و ، وَ رمزين لمحيطي
الدائرتين المعلومتين و ا ب مماسا
داخلا بفرض ان المسئلة محلولة



فنمدّ نصفي القطرين المتوازيين
و ا ، وَ ب ثم نبحث عن النقطتين
ا ، ب فاذا مدّ من نقطة وَ المستقيم
وَ حـ موازيا للمماس ا ب يشاهد ان
تعيين نقطة حـ كاف لتعيين كل واحدة
من النقطتين ا ، ب فاذا جعلت



نقطة و مركزا ورسم محيط دائرة بنصف قطر مساو الى و ا + وَ ب فيكون مماسا للمستقيم
و حـ وبناء عليه فانها تعين نقطة حـ بواسطة مدّ مماس من نقطة وَ لمحيط الدائرة الذي
مركزه و ونصف قطره مساو الى مجموع نصفي قطري الدائرتين المعلومتين



ومن المعلوم ان المسئلة لا تكون ممكنة الا اذا كانت نقطة وَ خارجة عن المحيط المساعد أعني
يجب أن يكون و وَ = او > ر + رَ

وهــذا يدل على ان المحيطين المعــلومين اما أن يكونا متباعدين فى الخارج أو متمــاسين كذلك وفى الحالة الاولى يكون للمسئلة حلان وأما فى الثانية فليس لها سوى حل واحد فقط

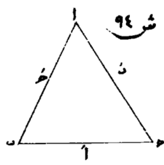
فى رسم المثلثــات

دعوى عمليـــــــة

(٩٦) طريقــة رسم المثلث اذا عــلم منــه ضلعان والزاوية المحصورة بينهــما (شكل ٩٤)

اذا فرض ان المسئلة محلولة وان ا ب ح هو المثلث المطلوب الذى علم منه ا , بَ = ا ح , حَ = ا ب

فمن حيث ان الضلع ا ح معلوم فانه يوضع فى أى وضع على مستوى العمــل ثم ترسم من نقطة ا احــدى نقط ا ح زاوية ح ا ب مساوية للزاوية المعلومة ثم يؤخذ على ا ب الطول ا ب = حَ المعلوم فاذا فصل ب ح فقد تم رسم المثلث



دعوى عمليـــــــة

(٩٧) طريقة رسم المثلث اذا علم منه ضلع والزاويتان المجاورتان له (شكل ٩٤)

اذا فرض ان المسئلة محلولة وان ا ب ح هو المثلث المطلوب الذى علم منه اَ = ب ح , ب , ح

فمن حيث ان اَ = ح ب فانه يوضع فى وضع ما فى مستوى العمل ثم يرسم من النقطتين ح و ب زاويتان مساويتان للزاويتين المعــلومتين فنقطة ا التى يتقاطع فيهــا المستقيمان الممدودان يتم بها رسم المثلث

تنبيه ١ ــ المسئلتان السابقتان لا يمكن أن يكون لهما غــير حل واحــد بناء على نظريات تساوى المثلثات المتقدمة

تنبيه ٢ ــ اذا لم تعلم الزاويتان المجاورتان ح و ب للضلع المعلوم اَ بل علمت الزاويتان ا , ح مثــلا يلزم قبــل كل شئ الحصول على الزاوية ب بواســطة طرح مجموع الزاويتين المعلومتين من قائمتين

دعوى عمليـــــة

(٩٨) طريقة رسم المثلث اذا علمت أضلاعه الثلاثة (شكل ٩٤)
اذا فرض ان المسئلة محلولة وان ا ب ح هو المثلث المطلوب الذى علم منه اَ = ب ح و
بَ = ا ح , حَ = ا ب

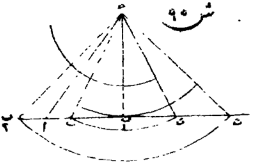
فمن حيث ان الضلع اَ = ب ح المعلوم فانه يوضع فى أى وضع فى مستوى العمل ثم ان نقطة ا
توجد ضرورة فى تقاطع محيطى الدائرتين اللتين مركزاهما ب , ح ونصفا قطريهما هما حَ و بَ

تنبيه ١ — يوجد للمسئلة حلان حيث ان محيطى الدائرتين يتقاطعان فى نقطتين غير أن
هذين الحلين متطابقان لكونهما متساويين حيث تساوت فيهما الاضلاع الثلاثة كل لنظيره

تنبيه ٢ — يجب لامكان حل المسئلة أن يتقاطع محيطا الدائرتين ويحصل ذلك بما تقرر من
كون الضلع الاكبر من أضلاع المثلث أصغر من مجموع الضلعين الآخرين وأكبر من فاضلهما

دعوى عمليـــــة

(٩٩) طريقة رسم المثلث اذا علم منه ضلعان والزاوية المقابلة لاحدهما (شكل ٩٥)
نفرض ان المسئلة محلولة وان ح ا ب هو المثلث
المطلوب الذى علم منه بَ = ا ح , اَ = ب ح
, ا = ح ا ب فمن حيث ان زاوية ا معلومة
فتؤخذ نقطة ما ولتكن ا على مستقيم غير محدود
وليكن ا ب ويمد منها مستقيم ا ح يصنع
مع ا ب زاوية مساوية للزاوية ا ثم يؤخذ
على ا ح طول مساو للضلع المجاور لزاوية ا



ولاجل تكميل رسم المثلث يكفى تعيين الرأس الثالثة ب غير أن هذه النقطة توجد فى آن واحد
على الضلع ا ب وعلى محيط الدائرة الذى مركزه ح ونصف قطره مساو اَ

تنبيه — من المفيد المناقشة فى الاحوال الممكنة لحل هذا المسئلة ولذلك يقال

أولا — المسئلة تكون غير ممكنة اذا كان اَ أصغر من العمود ح ب النازل من نقطة ح على
المستقيم ا ب

ثانيا — اذا كانت زاوية ا حادة فان الضلع اَ يمكن أن يكون مساويا الى حـ ب وفى هذه الحالة يكون للمسئلة حل واحد وهو المثلث حـ ب ا أو يكون أكبر من حـ ب وأصغر من حـ ا وفى هذه الحالة يكون للمسئلة حلان مقبولان وهما المثلث حـ ب ا و حـ بَ ا أو يكون أكبر من بَ = حـ ا وفى هذه الحالة لا يكون للمسئلة الا حل واحد وهو المثلث حـ بً ا لان المثلث حـ ب ا فيه زاوية منفرجة مكملة لزاوية ا المعلومة

ش ٩٦

ثالثا — اذا كانت زاوية ا قائمة فانه يتوصل الى حلين متطابقين

رابعا — اذا كانت زاوية ا منفرجة فلاجل أن تكون المسئلة ممكنة يجب أن يكون الضلع اَ أكبر من الضلع بَ ولا يوجد الا حل واحد (شكل ٩٦) وبالجملة فانه لا يوجد للمسئلة حلان الا فى حالة واحدة فقط وهى التى يكون فيها أ < ٩٠° و اَ < بَ

فى رسم قطعة دائرة على مستقيم تقبل زاوية معلومة

دعوى عمليـــــة

(١٠٠) طريقة رسم قطعة دائرة على مستقيم معلوم تقبل زاوية معلومة (شكل ٩٧) لتكن احـ ب القطعة المطلوبة بفرض ان المسئلة محلولة

ش ٩٧

وحينئذ فلا بد من تعيين المركز ولذلك يقال انه اذا اقيم عمود على وسط ا ب فانه يمر ضرورة بالمركز و ومن جهة أخرى اذا مـد من نقطة ب المماس ب ط لمحيط الدائرة فالزاوية ط ب م المتكونة من المماس ب ط والوتر ا ب تقاس بنصف القوس ا ب وحينئذ تكون مساوية للزاوية المطلوبة واذن فانه يمكن رسم هذا المماس قبل رسم القطعة وان المركز و يوجد على العمود القائم من نقطة ب على المماس ب ط ومما ذكر قد تبين ان المركـــز و يوجـد فى تقاطع مستقيمين يسهل رسمهما بناء على ما تقرر بنمرتى ٨٦ و ٨٧

الفصل السابع

تمرينات

١ ـ المطلوب تعيين نقطتين على محيط دائرة معلوم بحيث يكون بعداهما عن نقطة معلومة خارجة عنه متساويين

٢ ـ المطلوب ايجاد المحل الهندسي لمراكز الدوائر المتحدة في نصف القطر والمماسة لمستقيم معلوم

٣ ـ المطلوب امرار مماس لمحيط دائرة معلوم موازيا لمستقيم معلوم

٤ ـ ماهو المحل الهندسي لمراكز محيطات الدوائر المماسة لمستقيمين متقاطعين

٥ ـ المطلوب امرار محيط دائرة بنصف قطر معلوم يكون مماسا للمستقيمين معلومين سواء كانا متوازيين أو متقاطعين وذكر حالة عدم الامكان في حالة توازى المستقيمين المعلومين

٦ ـ المطلوب امرار محيط دائرة يمس مستقيما معلوما في نقطة معينة عليه مع شرط مروره بنقطة معلومة

٧ ـ اذا فرض نقطتان بينهما بعد قدره ء والمطلوب ان يمر منهما مستقيمان متوازيان يكون البعد بينهما مساويا م

٨ ـ المطلوب تعيين المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن محيط دائرة معلوم بمقدار معين

٩ ـ المطلوب تعيين المحل الهندسي لمراكز محيطات الدوائر المتساوية البعد عن محيط دائرة معلوم

١٠ ـ المعلوم محيط دائرة ومستقيم والمطلوب امرار محيط دائرة بنصف قطر معين يكون مماسا لهما

١١ ـ المطلوب امرار محيط دائرة بنصف قطر معين يقطع آخر معلوما في نقطتين معينتين اظهار حالة عدم الامكان وعدد الحلول

١٢ ـ المعلوم نقطتان والمطلوب تعيين نقطة تكون متباعدة عن احداهما ببعد م وعن الثانية ببعد ء ومتى يكون للمسئلة حلان ومتى يكون للمسئلة حل واحد ومتى تكون غير ممكنة

١٣ ـ المطلوب البرهنة على أنه اذا تماس محيطا دائرتين خارجا أو داخلا ومد من نقطة التماس قاطعان لهما ثم وصل بين نقطتى تقابلهما مع كل محيط بمستقيم فان هذين المستقيمين يصيران متوازيين واذا لم يمد من نقطة التماس الا قاطع واحد ومد من نقطتى تقابله بالمحيطين مماسان يكون هذان المماسان متوازيين

١٤ — المطلوب البرهنة على أنه اذا فرضت نقطة داخل زاوية وأنزل منها عمودان على ضلعيها كان الشكل الرباعى الحادث يمكن أن يمر به محيط دائرة

١٥ — المطلوب البرهنة على أن شبه المنحرف الذى ضلعاه المنحرفان متساويان يمكن رسمه داخل محيط دائرة

١٦ — المطلوب البرهنة على أنه اذا وصل من رأس المثلث القائم الزاوية الى وسط وتره بمستقيم كان هذا المستقيم الواصل مساويا لنصف الوتر

١٧ — اذا فرض مستقيمان متعامدان وفرض مستقيم ذو طول ثابت ينزلق عليهما والمطلوب معرفة محل أواسط أوتار المثلثات القائمة الزوايا المتكونة من ذلك

١٨ — اذا أنزل من رؤس المثلث أعمدة على أضلاعه ثم وصل بين مواقع هذه الاعمدة بمستقيمات فانه يطلب البرهنة على أن تلك الاعمدة منصفة لزوايا المثلث الحادث

١٩ — المطلوب البرهنة على أن المستقيمين المنصفين للزاويتين الحادثتين من امتداد الاضلاع المتقابلة من شكل رباعى مرسوم داخل الدائرة متعامدان

٢٠ — المطلوب البرهنة على أنه اذا مد وتران متقاطعان داخل دائرة فان مجموع القوسين المحصورين بين امتدادهما يكون مساويا لمجموع القوسين المحصورين بين القطرين الموازيين للوترين المذكورين

٢١ — المطلوب البرهنة على أن قطر الدائرة المرسومة داخل مثلث قائم الزاوية يساوى الفرق الكائن بين مجموع الضلعين المحيطين بالقائمة وبين الوتر

٢٢ — المطلوب رسم المثلث المتساوى الساقين اذا علم منه
أولا — القاعدة وزاوية الرأس
ثانيا — زاوية الرأس والارتفاع
ثالثا — القاعدة ونصف قطر الدائرة المرسومة داخله

٢٣ — المطلوب رسم المثلث القائم الزاوية اذا علم منه
أولا — الوتر وزاوية حادة
ثانيا — الوتر وأحد ضلعى القائمة
ثالثا — الوتر والارتفاع المناظر له
رابعا — أحد ضلعى القائمة والارتفاع المقابل للوتر
خامسا — أحد ضلعى القائمة ونصف قطر الدائرة المرسومة داخله

٢٤ — المطلوب رسم المثلث اذا علم منه نقط أوسط أضلاعه الثلاثة

٢٥ — المطلوب رسم المربع اذا علم قطره

٢٦ — المطلوب رسم المستطيل اذا علم أحد أضلاعه والزاوية الحادثة بين قطريه

٢٧ — المطلوب رسم المعين اذا علم قطراه

٢٨ — المطلوب رسم متوازى الاضلاع اذا علم ضلع منه وقطراه

٢٩ — المطلوب رسم شبه المنحرف المتساوى الساقين اذا علم منه

أولا — قاعدتاه وزاوية منه

ثانيا — قاعدتاه وارتفاعه

٣٠ — المطلوب رسم شبه المنحرف الكائن كيفما اتفق اذا علمت أضلاعه الاربعة

(تم الجزء الاوّل من التحفة البهية ويليه الجزء الثانى ان شاء الله تعالى)

فهرســـة الجـــزء الاول من التحفة البهية

(تمت)

الجــــزء الثانى

من كتاب التحفة البهيــة فى الاصول الهندسـية

تأليف

حضرة محمد بك نظيم

ناظـــر مدرســة دار العـــلوم وقـــلم الترجـــه

(تنبيــــــه)

وان كان ذكرنا فى خطبة الكتاب فى الجزء الاوّل ان الزيادات تميز عن الاصل بكتابتها بحروف دقيقة غير أن مقتضيات الاحوال أوجبت تميزها بوضع نجوم قبلها فى أوائل السطور فليتنبه

(الطبعة الاولى)

بالمطبعة الكبرى الاميرية ببولاق مصر المحميــة

ســنة ١٣٠٥ هجرية



بسم الله الرحمن الرحيم

الجزء الثانى

في مساحات كثيرى الاضلاع والخطوط المتناسبة وتشابه الاشكال والاشكال المنتظمة ومساحة الدائرة

الباب الاول

في مسائل كثيرى الاضلاع والخطوط المتناسبة وتشابه الاشكال

الفصل الاول

في مسائل كثيرى الاضلاع

تعاريف

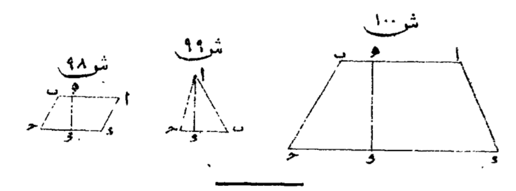
(١٠١) مساحة الشكل هى النسبة الكائنة بين سطحه وسطح وحدة السطوح وحدة السطوح المتفق عليها هى المربع الذى ضلعه وحدة الاطوال

(١٠٢) الشكلان المتكافئان هما المتساويان فى المساحة يمكن ان يتكافأ الشكلان مع ما بينهما من التباين الكلى فى الصورة فالدائرة مثلا يمكن أن تكافئ مربعاً أو مستطيلاً أو مثلثاً أو غير ذلك

(١٠٣) ارتفاع متوازى الاضلاع ا ب حـ ء (شكل ٩٨) هو العمود هـ و الذى يقاس به البعد المحصور بين الضلعين المتوازيين ا ب , حـ ء المعتبرين قاعدتين له

(١٠٤) ارتفاع المثلث ا ب حـ (شكل ٩٩) هو العمود ا ء الذى يقاس به البعد المحصور بين الرأس ا و الضلع ب حـ المقابل لها المعتبر قاعدة له

(١٠٥) ارتفاع شبه المنحرف ا ب حـ ء (شكل ١٠٠) هو العمود هـ و الذى يقاس به البعد المحصور بين القاعدتين ا ب , حـ ء المتوازيتين



دعوى نظرية

(١٠٦) متوازيا الاضلاع المتحدان فى القاعدة والارتفاع متكافئان (شكل ١٠١) أعنى ان متوازيى الاضلاع ا ب حـ ء , ا هـ و ء المتحدين فى القاعدة ا ء وفى الارتفاع ء ع هما متكافئان (وبالضرورة تكون قاعدتاهما الاخريان ب حـ , هـ و على استقامة واحدة)

ش ١٠١

والبرهنة على ذلك يقال ان المثلثين ا هـ ب , ء و حـ فيهما الضلع ا هـ = الضلع ء و من خاصية متوازى الاضلاع ا هـ و ء والضلع ا ب = الضلع ء حـ من خاصية متوازى الاضلاع ا ب حـ ء والضلع ب هـ = الضلع حـ و لان كل واحد من الضلعين هـ و , ب حـ يساوى ا ء فاذا طرح من كل منهما البعد و ب يكون ب هـ = حـ و واذن فالمثلثان متساويان

ثم اذا طرح على التعاقب من الشكل الكلى ا هـ حـ ء المثلثان المذكوران كان الباقيان هما متوازيا الاضلاع ا ب حـ ء , ا هـ و ء واذن يكونان متكافئين وهو المطلوب

تنبيه ـ حيث ان أحد متوازيى الاضلاع المعلومين يمكن أن يكون مستطيلا فيكون متوازى الاضلاع والمستطيل المتحدان فى القاعدة والارتفاع متكافئين

دعوى نظـــــرية

(١٠٧) النسـبة بين المستطيلين المتحدى الارتفاع كالنسبة بين قاعدتيهما (شكل ١٠٢)
أعنى ان النسبة بين المستطيلين ا ب حـ د , ا ب و هـ المتحدى الارتفاع هـ و هى كالنسـبة بين القاعـدتين ب حـ , ب و

والبرهنة على ذلك يفرض أولا ان القاعدتين ب حـ , ب و متناسبتان وان النسبة بينهما كالنسبة بين العددين ٧ و ٤ فاذا قسمت القـاعدة الاولى الى سـبعة أقسام متساوية فان الثانية تشتمل ضرورة على أربعة من هـذه التقاسيم ثم اذا اقيمت من نقط التقاسيم أعمدة على القـاعدة فانه يتشكل سـبعة مستطيلات جزئية متساوية يتركب منها المسـتطيل ا ب حـ د وأما المستطيل ا ب و هـ فانه يشتمل على أربعة منها وتكون النسبة حينئذ بينهما كالنسبة بين العددين ٧ و ٤ وهى عين النسبة بين القاعدتين ب حـ , ب و
وأما اذا لم تكن القاعـدتان متناسبتين فانه يبرهن على صحة هـذه النظرية بعين الطريقة التى استعملت بنمرة ٨ من الجزء الاول
نتيجـــة ــ حيث ان الضلعين المتجاورين من المستطيل يمكن تسمية احدهما قاعدة وثانيهما ارتفاعا بلا فرق فى ذلك أمكن ان يقال ان النسبة بين المستطيلين المتحدى القاعدة كالنسـبة بين ارتفاعيهما

دعوى نظـــــرية

(١٠٨) النسبة بين أى مستطيلين تساوى حاصل ضرب النسبة الكائنة بين قاعدتيهما فى النسبة الكائنة بين ارتفاعيهما وذلك اذا رمز بالرمزين م و مَ للمستطيلين وبالرمزين ن و ع لقاعدة الاول وارتفاعه وبالرمزين نَ و عَ لقاعدة الثانى وارتفاعه ثم رمز لمستطيل ثالث بالرمز مً ولقاعدته بالرمز ن ولارتفاعه بالرمز عَ أى فرض أنه متحد مع أحد المستطيلين فى القاعدة ومع الثانى فى الارتفاع
تحصل بمقتضى النظرية السابقة ونتيجتها ان

$$\frac{م}{مً} = \frac{ع}{عَ} \quad , \quad \frac{مً}{مَ} = \frac{ن}{نَ}$$

وبضرب هاتين المتساويتين فى بعضهما طرفا بطرف تكون حواصل الضرب متساوية ويحدث

$$\frac{م \times مً}{مً \times مً} = \frac{ع}{عً} \times \frac{ن}{نً} \quad أو \quad \frac{م}{مً} = \frac{ن}{نً} \times \frac{ع}{عً}$$

وهو المطلوب

مثال ـ اذا قيست الابعاد ن و ع و نً و عً بوحدة ما من وحدات الاطوال وليكن المتر مثلا وكانت مقاديرها هى على الترتيب ٦ متر و ٤ متر و ٣ متر و ٢ متر فانه يحدث

$$\frac{م}{مً} = \frac{٦}{٣} \times \frac{٤}{٢} = ٢ \times ٢ = ٤$$

أعنى ان المستطيل م يشتمل على المستطيل مً أربع مرات

دعوى نظـــــــرية

(١٠٩) مساحة المستطيل تساوى حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه

وللبرهنة على ذلك يقال لو فرضنا فى النظرية السابقة ان مً هو المربع المعتبر وحدة للسطوح وان كلا من بعديه نً و عً مساو لوحدة الاطوال فان المتساوية السابقة وهى

$$\frac{م}{مً} = \frac{ن}{نً} \times \frac{ع}{عً}$$

تدل على ان مساحة المستطيل م تساوى حاصل ضرب مقاس قاعدته فى مقاس ارتفاعه وهو المطلوب

تنبيه ـ هذه النظرية لا تكون حقيقية الا اذا كان وحدة السطوح هو المربع الذى ضلعه وحدة الاطوال وحيث ان النسبة $\frac{م}{مً}$ تدل على مقتضى التعريف (١٠١) على مساحة المستطيل م وان النسبتين $\frac{ن}{نً}$ و $\frac{ع}{عً}$ تدلان على نتيجتى تقدير الطولين ن و ع بوحدة الاطوال أو على نتيجة مقاسهما أمكن أن يعبر عن مساحة المستطيل بهذا القانون $م = ن \times ع$

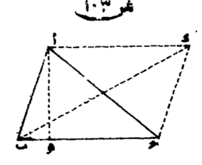
مثال ـ اذا فرض ان ضلع المربع المعتبر وحدة هو المتر وقدر به البعدان ن و ع وكان مقدارهما ٨ متر و ٤ متر تحصل $م = ٨ \times ٤ = ٣٢$ مترا مربعا

نتيجة ١ ـ حيث ان متوازى الاضلاع يكافئ المستطيل المتحد معه فى القاعدة والارتفاع فتكون مساحته مساوية لحاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه

نتيجة ٢ — حيث ان المربع يمكن اعتباره كأنه مستطيل ضلعاه المتجاوران متساويان فاذا كان ح دالا على مقاس أحد أضلاعه فتكون مساحة المربع مساوية الى ح × ح = ح٢

دعوى نظـــــرية

(١١٠) مساحة المثلث تساوى نصف حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه (شكل ١٠٣)



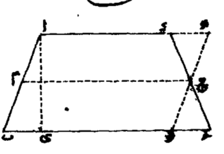
يمد لذلك من النقطتين أ , ح مستقيمان موازيان للضلعين ب ح , اب فيتشكل من ذلك متوازى الاضلاع اب ح ى المتحد مع المثلث اب ح فى القاعدة ب ح وفى الارتفاع اهـ وحيث كان المثلث نصف متوازى الاضلاع (٥٤ رابعا جزء ١) وكانت مساحة متوازى الاضلاع اب ح ى تساوى ب ح × اهـ فتكون مساحة المثلث اب ح = ½ ب ح × اهـ = ½ ق × ع وهو المطلوب

نتيجة ١ — المثلثات المتحدة القاعدة ورؤسها على مستقيم مواز للقاعدة متكافئة لاتحادها فى الارتفاع مثل المثلثين اب ح , ى ح ب

نتيجة ٢ — حيث ان أى شكل كثير الاضلاع يمكن تقسيمه الى مثلثات بواسطة توصيل اقطاره فيمكن حينئذ تقدير مساحته بواسطة ضم مساحات المثلثات المتركب هو منها على بعضها

دعوى نظـــــرية

(١١١) مساحة شبه المنحرف تساوى حاصل ضرب ارتفاعه فى نصف مجموع قاعدتيه المتوازيتين (شكل ١٠٤) وللبرهنة على ذلك



يحول شبه المنحرف الى متوازى أضلاع يكافئه بواسطة أن يمر من نقطة ع وسط الضلع ح ى المستقيم هـ و موازيا للضلع اب ويمد حتى يقابل القاعدتين فى النقطتين هـ , و فمتوازى الاضلاع الحادث اب وهـ يكون مكافئا لشبه المنحرف اب ح ى المتحد معه فى الارتفاع لان المثلث و ع ح يساوى المثلث هـ ع ى لتساوى الضلع ع ح للضلع ع ى والزاوية

وع ح للزاوية هـ ع ء والزاوية ع ح و للزاوية هـ ء ع وينتج من تساويهما أن ح و = هـ ء
وحينئذ تكون مساحة متوازى الاضلاع أو شبه المنحرف مساوية الى ب و × ا ى
لكن ب و = ب ح ـ ح و ومن جهة أخرى ب و أو ا هـ = ا ء + ح و واذن يكون

٢ ب و = ب ح + اء أو ب و = $\frac{1}{2}$ (ب ح + ا ء) = $\frac{1}{2}$ (ن + نَ)

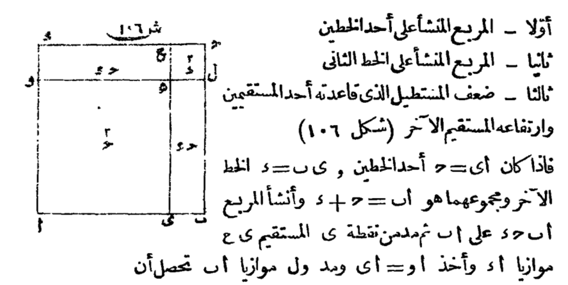
وبناء عليه تكون مساحة شبه المنحرف مساوية الى $\frac{1}{2}$ (ن + نَ) × اى = $\frac{1}{2}$ (ن + نَ) × ع
وهو المراد

تنبيه ١ — اذا مد من نقطة ع وسط المستقيم ء ح المستقيم ع م موازيا للمستقيم ا ء فتكون نقطة م وسط الضلع ا ب ضرورة ويكون ع م مساويا الى ب و أو مساويا الى $\frac{1}{2}$ (ن + نَ) وتكون مساحة شبه المنحرف مساوية الى ع م × ع
أعنى ان مساحة شبه المنحرف تساوى حاصل ضرب المستقيم المتوسط فى الارتفاع

تنبيه ٢ — قد ذكرنا بنمرة (١١٠) نتيجة ٢ انه يمكن أخذ مساحة أى شكل كثير الاضلاع بواسطة تقسيمه الى مثلثات وضم مسائحها على بعضها
والآن نقول انه يوجد طريقة أخرى لايجاد مساحة أى شكل كثير الاضلاع مستعملة غالبا فى الاعمال وهى تقسيم الشكل المطلوب أخذ مساحته الى مثلثات أو أشباه منحرف (شكل ١٠٥) قائمة بواسطة انزال جملة أعمدة من جميع رؤس زواياه على أحد أقطاره ا هـ مثلا وحيث ان مقادير اجزاء القاعدة ومقادير الاعمدة يمكن مقاسها بغاية الدقة فيتوصل بالطرق المتقدمة الى أخذ مسائح الاجزاء المختلفة المتركب منها الشكل المذكور ثم تجمع على بعضها
ومع ذلك فلا يشترط مد القطر ا هـ لانه يمكن الوصول الى المقصود بواسطة مد مستقيم اما ان يقابل الشكل المذكور أو لا يقابله ثم ينزل من رؤس زواياه أعمدة عليه وتؤخذ مساحات الاجزاء المحصورة بين الاعمدة و بين المستقيم الممدود

دعوى نظـــــرية

(١١٢) المربع المنشأ على مجموع مستقيمين يمكن اعتبار تركيبه من أجزاء ثلاثة وهى



أولا — المربع المنشأ على أحد الخطين

ثانيا — المربع المنشأ على الخط الثانى

ثالثا — ضعف المستطيل الذى قاعدته أحد المستقيمين وارتفاعه المستقيم الآخر (شكل ١٠٦)

فاذا كان اى = ح أحد الخطين ، ى ب = ى الخط الآخر ومجموعهما هو اب = ح + ى وأنشأ المربع اب ح ى على اب ثم مد من نقطة ى المستقيم ى ع موازيا اى وأخذ او = اى ومد ول موازيا اب تحصل أن

وهـ = ى ع = اى = او = ى هـ = ب ل = ح ،

هـ ل = ح ع = ب ى = و ى = هـ ع = ل ح = ى

وحينئذ يكون اى هـ و هو المربع المنشأ على ح ، هـ ل ح ع هو المربع المنشأ على ى والشكلان ى ب ل هـ ، هـ ع ى و هما مستطيلان متساويان فى البعدين ح ، ى وبذلك يثبت المطلوب

تنبيه — اذا دل ح ، ى على مقاسى الخطين اى ، ى ب فان ح + ى يدل على مقاس الخط اب وحيث ان مساحة المربع تساوى القوة الثانية لمقاس ضلعه فانه يتوصل الى

$$(ح + ى)^2 = ح^2 + ى^2 + ٢ ح ى$$

وهو قانون يمكن البرهنة عليه بواسطة القواعد الحسابية

دعوى نظـــرية

(١١٣) المربع المنشأ على فاضل خطين يكافئ مجموع مربعيهما ناقصا ضعف مستطيلهما (شكل ١٠٧)

فاذا كان اب = ح أحد الخطين ، ب ح = ى الخط الثانى وفاضلهما اح = ح — ى وانشأ المربع اب ى و على اب ثم مدّ ى و على استقامته جهة و وأخذ ول = ب ح = ى ثم أخذ اهـ = اح = ح — ى ورسم المستقيم هـ ط موازيا اب وأخذ على امتداده

هـ ك = ب ح ووصل ل ك ومد من نقطة ح المستقيم ح ع موازيا أو نحصل

ا ب = ح ع = ع ل = ح

ب ح = ط ى = ل ك = د

وحينئذ يكون الشكل ا ح د هـ هو المربع المنشأ على ا ح أو على ح ـ د والشكل هـ ك ل و هو المربع المنشأ على ح ب أو على د والشكلان ب ى ع ح ، ع د ك ل هما مستطيلان متساويان قاعدة كل واحد منهما ح وارتفاعه د

فاذا طرحنا من الشكل الكلى الذى هو عبارة عن مجموع المربعين المستطيلين السابقين كان الباقى مساويا للمربع المنشأ على ا ح وهو المطلوب

تنبيه ـ اذا دل العددان ح ، د على مقاسى الخطين ا ب ، ب ح فيكون ح ـ د دالا على مقاس الفرق بينهما واذن يكون

$$(ح - د)^2 = ح^2 + د^2 - ٢ ح د$$

دعوى نظـــــرية

(١١٤) المستطيل المنشأ على مجموع خطين وفاضلهما يساوى الفرق بين مربعيهما (شكل ١٠٨)

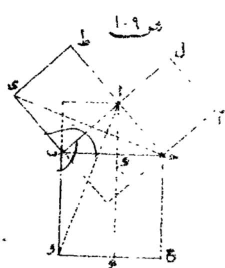
فاذا كان ا ب = ح أحد الخطين ، ب ح = د الخط الآخر ، ا ك = ح + د مجموعهما ، ا ح = ح ـ د فاضلهما ثم أنشأ المربع ا ب ى و على ا ب وأخذ ا هـ = ا ح ورسم المستقيم هـ ل موازيا الى ا ب والمستقيمان ك ل ، ح ع موازيين الى ا و حدث أن ا ح د هـ هو المربع المنشأ على ا ح أو ح ـ د وأن الشكل د ط ى ع هو المربع المنشأ على ب ح أو د وأن الشكلين هـ د ع و ، ل ك ب ط هما مستطيلان متساويان قاعدة كل واحد منهما مساوية ا ح أو ح ـ د وارتفاعهما ب ح = د وحينئذ لو أسقط المربع د ط ى ع من المربع ا ب ى و لكان الباقى منه مكافئا للمستطيل ا ك ل هـ وذلك لان بينهما المستطيل ا ب ط هـ مشترك والباقى من المستطيل ا ك ل هـ هو المستطيل ب ك ل ط ومن المربع المستطيل د هـ و ع وحيث كان هذان المستطيلان الاخيران متساويين ثبت المطلوب

تنبيـه ــ اذادل العددان ح و ء على مقاسى الخطين اب و بح فيكون ح + ء دالا على مقاس مجموعهما و ح ــ ء دالا على مقاس فاضلهما ويكون (ح + ء) (ح ــ ء) = $\text{ح}^{2} - \text{ء}^{2}$

دعوى نظـــــرية

(١١٥) المربع المنشأ على وتر القائمـة فى المثلث القائم الزاوية يساوى مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين منه (شكل ١٠٩) (هذه النظرية منسوبة الى فيثاغورس)

فاذا كان ا ب ح مثلثا قائم الزاوية وأنشأت المربعات حو و حل و بط على أضلاعه الثلاثة وأنزل من الرأس ا العمود اھ على الوتر حب انقسم المربع حو الى مستطيلين حھ و ءو ويطلب البرهنـة على أن المستطيل حھ يكافئ المربع حل والمستطيل ءو يكافئ المربع بط



وللوصول الى ذلك يوصل المستقيمان ىح و او ثم يتصوّر دوران المثلث ىبح حول نقطة ب بمقدار زاوية قائمة فيقع الضلع بى على الضلع با وتقع نقطة ى على نقطة ا وكذا ينطبق الضلع حب على الضلع بو وتقع نقطة ح على نقطة و وحينئـذ يكون المثلث ىبح مساويا للمثلث ابو لكن المثلث ىبح متحـد مع المربع اى فى القاعـدة والارتفاع فيكون نصفه وكذلك المثلث ابو هو نصف المستطيل ءو لاتحاده معه فى القاعدة والارتفاع وبناء عليه يكون المربع اى مكافئا للمستطيل ءو وبمثل ذلك يبرهن على تكافئ المربع حل للمستطيل ءع واذن يكون $\overline{\text{بح}}^{2} = \overline{\text{اب}}^{2} + \overline{\text{اح}}^{2}$ وهو المطلوب

* (ويمكن البرهنة على هذه النظرية بطريقة أخرى شكل ١١٠)

* بان يقال اذا كان اب وتر المثلث القائم الزاوية المفروض وأنشأ عليه المربع ابحء بحيث
* يشمل المثلث ثم أنزل من نقطة ح العمود حع على امتـداد الضلع بو فالمثلث القائم
* الزاوية بحع الحادث يكون مساويا للمثلث ابو لان فيهما الوتر بح = الوتر

* اب والزاوية حـ ب ع = الزاوية ب ا و لان كل واحدة منهما تتمم زاوية ا ب و على
* قائمة وحينئذ يكون الضلع ب ع = ا و والضلع
* حـ ع = ب و ويكون بناء عليه و ع = ا و − ب و
* ثم اذا جرى فى نقطة د عمل مشابه لما أجرى فى نقطة حـ
* فان المثلثين الحادثين يكونان متساويين ومساويين
* للمثلث ا ب و ويكون ع ل = ل هـ = هـ و = و ع
* = ا و − ب و وبالتأمل فى الشكل يشاهد أن المربع
* ا ب حـ د يتركب من خمسة أجزاء وهى المربع و ع ل هـ
* وأربعة مثلثات متساوية قاعدة كل واحد منها ب و وارتفاعه ا و ومساحة كل منها
* مساوية $\frac{1}{2}$ ب و × ا و

شكل ١١٠

* فاذا رمز بالرموز ا و ب و حـ لاضلاع المثلث القائم الزاوية حدث

* $\text{ا}^2 = (\text{ب} - \text{حـ})^2 + 4 \times \frac{\text{ب حـ}}{2} = (\text{ب} - \text{حـ})^2 + 2\,\text{ب حـ}$

* لكن $(\text{ب} - \text{حـ})^2 = \text{ب}^2 + \text{حـ}^2 - 2\,\text{ب حـ}$ (١١٣) فبالاستعواض يحدث

* $\text{ا}^2 = \text{ب}^2 + \text{حـ}^2$

* وهو المطلوب

نتيجة ١ − يتوصل بالارتباط $\overline{\text{ب حـ}}^2 = \overline{\text{ا ب}}^2 + \overline{\text{ا حـ}}^2$ الى ايجاد أى ضلع من أضلاع المثلث القائم الزاوية متى علم الاثنان الآخران أعنى يكون

$$\overline{\text{ا ب}}^2 = \overline{\text{ب حـ}}^2 - \overline{\text{ا حـ}}^2 \quad \text{أو} \quad \overline{\text{ا حـ}}^2 = \overline{\text{ب حـ}}^2 - \overline{\text{ا ب}}^2$$

نتيجة ٢ − تكافؤ المستطيلين ب هـ و د ع للمربعين ب ط و ا م يتوصل به الى هذين القانونين

$$\overline{\text{ا ب}}^2 = \text{ب و} \times \text{ب د} = \text{ب حـ} \times \text{ب د} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{ب حـ}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ب د}}$$

$$\overline{\text{ا حـ}}^2 = \text{جـ ع} \times \text{حـ د} = \text{ب حـ} \times \text{حـ د} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{ب حـ}}{\text{ا حـ}} = \frac{\text{ا حـ}}{\text{حـ د}}$$

ومنهما

$$\frac{\overline{\text{ا ب}}^2}{\overline{\text{ا حـ}}^2} = \frac{\text{ب د}}{\text{حـ د}}$$

أعنى أن أى ضلع من ضلعى القائمة من المثلث القائم الزاوية وسط متناسب بين الوتر بتمامه وسهم الوتر المجاور له وأن النسبة بين مربعى ضلعى القائمة مساوية للنسبة الكائنة بين سهمى الوتر

نتيجة ٣ ـ اذا كان المثلث القائم الزاوية المعلوم اب ح متساوى الساقين بأن كان فيه اب = اح فانه يحدث بناء على ما تقرر أن

$$\overline{ب ح}^٢ = ٢ \overline{اب}^٢ \quad أو \quad \frac{\overline{ب ح}^٢}{\overline{اب}^٢} = ٢$$

أعنى أن القوة الثانية للنسبة الكائنة بين قطر المربع وضلعه هى ٢ وحينئذ تكون نفس هذه النسبة مساوية $\sqrt{٢}$ ويحدث $\frac{ب ح}{اب} = \sqrt{٢} = ١٫٤١٤٢$

تعـــــــــريف

(١١٦) مسقط المستقيم اب (شكل ١١١) على المستقيم ح ء هو المستقيم أَ بَ المحصور بين موقعى العمودين النازلين من نهايتى المستقيم اب على المستقيم ح ء

دعوى نظـــــرية

(١١٧) المربع المنشأ على الضلع المقابل لزاوية حادة من أى مثلث يكافئ مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين منه ناقصا ضعف المستطيل الذى قاعدته أحد الضلعين المذكورين وارتفاعه مسقط الثانى عليه

يمكن اعتبار حالتين فى هذه الدعوى وهما على حسب وقوع العمود المسقط لضلع المثلث داخله أو خارجه

الحالة الاولى ـ (شكل ١١٢) نفرض أن الزاوية الحادة هى ح وأن موقع العمود اء حاصل داخل المثلث على الضلع ب ح

فيؤخذ من المثلث القائم الزاوية اب ء أن $\overline{اب}^٢ = \overline{اء}^٢ + \overline{ب ء}^٢$

لكن

$$\overline{اء}^٢ = \overline{اح}^٢ - \overline{ح ء}^٢ \quad , \quad \overline{ب ء}^٢ = (ب ح - ء ح)^٢ =$$
$$\overline{ب ح}^٢ + \overline{ء ح}^٢ - ٢ ب ح \times ء ح$$

شكل ١١٢

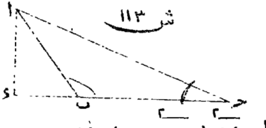
وحينئذ يكون

$$\overline{\text{اب}}^{2} = \overline{\text{اح}}^{2} - \overline{\text{حد}}^{2} + \overline{\text{بح}}^{2} + \overline{\text{دح}}^{2} - ٢\ \text{بح} \times \text{دح} \quad \text{أو}$$

$$\overline{\text{اب}}^{2} = \overline{\text{اح}}^{2} + \overline{\text{بح}}^{2} - ٢\ \text{بح} \times \text{حد}$$

وهو المطلوب

الحالة الثانية — (شكل ١١٣) نفرض أن الزاوية الحادة هي ح وأن موقع العمود اد حاصل خارج المثلث على امتـداد ب ح فيؤخـذ من المثلث القائم الزاوية ا ب د ان



$$\overline{\text{اب}}^{2} = \overline{\text{اد}}^{2} + \overline{\text{بد}}^{2}$$

لكن

$$\overline{\text{اد}}^{2} = \overline{\text{اح}}^{2} - \overline{\text{حد}}^{2} \quad , \quad \overline{\text{بد}}^{2} = (\text{دح} - \text{بح})^{2} = \overline{\text{دح}}^{2} + \overline{\text{بح}}^{2} - ٢\ \text{دح} \times \text{بح}$$

وحينئذ يكون

$$\overline{\text{اب}}^{2} = \overline{\text{اح}}^{2} - \overline{\text{حد}}^{2} + \overline{\text{دح}}^{2} + \overline{\text{بح}}^{2} - ٢\ \text{دح} \times \text{بح} \quad \text{أو}$$

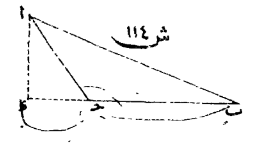
$$\overline{\text{اب}}^{2} = \overline{\text{اح}}^{2} + \overline{\text{بح}}^{2} - ٢\ \text{دح} \times \text{بح}$$

وهو المطلوب

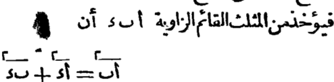
دعوى نظـــــريه

(١١٨) المربع المنشأ على الضلع المقابل لزاوية منفرجـة في أي مثلث منفرج الزاوية يكافئ مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين منـه زائداً ضعف المستطيل الذي قاعدته أحـد الضلعين وارتفاعه مسقط الثاني عليه (شكل ١١٤)

لنفرض أن ح هي الزاوية المنفرجة وأن ح د مسقط الضلع اح على الضلع ب ح



فيؤخذ من المثلث القائم الزاوية ا ب د أن



$$\overline{\text{اب}}^{2} = \overline{\text{اد}}^{2} + \overline{\text{بد}}^{2}$$

لكن

$\overline{\text{اد}}^{2} = \overline{\text{اح}}^{2} - \overline{\text{دح}}^{2}$ و $\overline{\text{بد}}^{2} = (\text{بح} + \text{حد})^{2} = \overline{\text{بح}}^{2} + \overline{\text{حد}}^{2} + ٢\ \text{بح} \times \text{حد}$

وحينئذ يكون

$\overline{\text{اب}}^{2} = \overline{\text{اح}}^{2} - \overline{\text{دح}}^{2} + \overline{\text{بح}}^{2} + \overline{\text{حد}}^{2} + ٢\ \text{بح} \times \text{حد} = \overline{\text{اح}}^{2} + \overline{\text{بح}}^{2} + ٢\ \text{بح} \times \text{حد}$

وهو المراد

تنبيه – يستفاد من هذه النظرية والتين قبلها ان المثلث القائم الزاوية ينفرد دون غيره من المثلثات بهذا الارتباط وهو $\text{ا}^{2} = \text{ب}^{2} + \text{ح}^{2}$

وحينئذ فمتى وجد هذا الارتباط بين أضلاع أى مثلث فانه يحكم فى الحال بأنه قائم الزاوية وعليه فالمثلث الذى مقاس أضلاعه هى ٥ و ٤ و ٣ هو قائم الزاوية لان $٥^{2} = ٤^{2} + ٣^{2}$

دعوى نظرية

(١١٩) مجموع مربعى أى ضلعين من أى مثلث يكافئ ضعف مربع المستقيم المتوسط المحصور بينهما زائدا ضعف مربع نصف الضلع الثالث (المستقيم المتوسط هو المار بين رأس المثلث ومنتصف القاعدة) (شكل ١١٥)

فاذا كان او المستقيم المتوسط بالنسبة للضلع بح وكان اد عمودا عليه تكون زاوية اوب منفرجة ويتحصل بمقتضى نظرية نمرة (١١٨) ان

$$\overline{\text{اب}}^{2} = \overline{\text{او}}^{2} + \overline{\text{بو}}^{2} + ٢\ \text{وب} \times \text{ود} \quad (١)$$

وحيث ان زاوية اوح حادة يتحصل أيضا بمقتضى نظرية نمرة (١١٧) أن

$$\overline{\text{اح}}^{2} = \overline{\text{او}}^{2} + \overline{\text{حو}}^{2} - ٢\ \text{حو} \times \text{ود} \quad (٢)$$

فاذا جمعت هاتان المتساويتان على بعضهما ولوحظ أن حو = بو يحدث

$$\overline{\text{اب}}^{2} + \overline{\text{اح}}^{2} = ٢\ \overline{\text{او}}^{2} + ٢\ \overline{\text{حو}}^{2}$$

وهو المطلوب

تنبيـه ـ اذا رمز بالحروف أ و ب و ح لاضـلاع المثلث وبالحروف ل و م و ن للمستقيمات المتوسطة المقابلة لها حدث

$$\text{ب}^2 + \text{ح}^2 = ٢\,\text{ل}^2 + \frac{\text{أ}^2}{٢} \quad \text{و}$$

$$\text{ح}^2 + \text{أ}^2 = ٢\,\text{م}^2 + \frac{\text{ب}^2}{٢} \quad \text{و}$$

$$\text{أ}^2 + \text{ب}^2 = ٢\,\text{ن}^2 + \frac{\text{ح}^2}{٢}$$

وهى متساويات يتوصل بها الى ايجاد مقادير المستقيمات المتوسطة اذا علم مقادير الاضلاع الثلاثة للمثلث وبالعكس

نتيجة ١ ــ مجموع مربعات أضلاع أى شكل متوازى الاضلاع يكافئ مجموع مربعى قطريه

نتيجة ٢ ــ الفرق بين مربعى أى ضلعين من مثلث يكافئ ضعف المستطيل الذى قاعدته الضلع الثالث وارتفاعه مسقط المستقيم المتوسط عليه

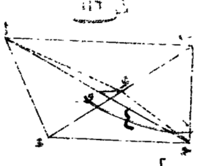
وذلك لانه لو طرحت المتساوية (٢) من المتساوية (١) السابقتين يحدث

$$\overline{\text{اب}}^2 - \overline{\text{اح}}^2 = ٤\,\text{حو} \times \text{دو} = ٢\,\text{حب} \times \text{دو}$$

وهو المراد

دعوى نظـــــرية

(١٢٠) مجموع مربعات أضلاع أى شكل رباعى يكافئ مجموع مربعى قطريه زائداً أربعة أمثال مربع المستقيم الواصل بين منتصفى القطرين (شكل ١١٦)



فاذا كانت نقطة و وسط القطر اح ونقطة هـ وسط القطر ب د فانه يؤخذ من المثلث اب د أن (١١٩)

$$\overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{اد}}^2 = ٢\,\overline{\text{اهـ}}^2 + ٢\,\overline{\text{دهـ}}^2$$

وكذلك يؤخذ من المثلث بدح أن

$$\overline{\text{دح}}^2 + \overline{\text{بح}}^2 = ٢\,\overline{\text{حهـ}}^2 + ٢\,\overline{\text{دهـ}}^2$$

وبجمع هاتين المتساويتين على بعضهما يحدث

$$\overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{اد}}^2 + \overline{\text{دح}}^2 + \overline{\text{بح}}^2 = ٢\left(\overline{\text{اهـ}}^2 + \overline{\text{حهـ}}^2\right) + \overline{\text{بد}}^2$$

لكن المثلث اهـ ح يؤخذ منه أيضاً أن

$$\overline{\text{اه}}^2 + \overline{\text{هح}}^2 = 2\,\overline{\text{هو}}^2 + 2\,\overline{\text{وح}}^2$$ أو

$$2\left(\overline{\text{اه}}^2 + \overline{\text{هح}}^2\right) = 4\,\overline{\text{هو}}^2 + 4\,\overline{\text{وح}}^2 = 4\,\overline{\text{وه}}^2 + \overline{\text{اح}}^2$$

ومع الاستعواض يحدث

$$\overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{اد}}^2 + \overline{\text{دح}}^2 + \overline{\text{بح}}^2 = \overline{\text{بد}}^2 + \overline{\text{اح}}^2 + 4\,\overline{\text{وه}}^2$$

وهو المطلوب

نتيجة ـ اذا كان هـ و عدماً (صفراً) بأن كان القطران ينصفان بعضهما فيكون الشكل متوازى الاضلاع ويكون مجموع مربعات أضلاعه مكافئاً لمجموع مربعى قطريه وبذلك قد توصلنا الى النتيجة الاولى من النظرية السابقة

وبالعكس اذا وجد فى شكل رباعى أن مجموع مربعات أضلاعه يكافئ مجموع مربعى قطريه فيكون متوازى الاضلاع

الفصل الثانى

فى الخطوط المتناسبة

دعوى نظرية

(١٢١) اذا قطع ضلعا مثلث بمستقيم موازٍ ضلعه الثالث فانه يقسمهما الى أجزاء متناسبة (نظرية طاليس) (شكل ١١٧)

أعنى اذا كان هـ د موازيا ب ح وقاطعا للضلعين اب و اح فانه يقسمهما الى أجزاء متناسبة

وللبرهنة على ذلك نفرض أولا أن المستقيمين اد و دب متناسبان أى انه يوجد بينهما مقياس مشترك خطى ينحصر فى الاول ٣ مرات مثلا وفى الثانى مرتين فتكون النسبة بينهما مساوية الى $\frac{3}{2}$

ثم اذا مد من نقط تقاسيم ا ب مستقيمات موازية ب ح فان امتدادتها المحصرة بينهما من المستقيم ا ح أجزاء متساوية أعنى أن

ال = ل م = م هـ = هـ ى = ى ح

وذلك لانه اذا مد من نقطتى ل , هـ مثلا المستقيمان ل ع , هـ ك موازيين الى ا ب فالمستقيم ل ع يصير مساويا ى ح لكونهما متوازيين محصورين بين مستقيمين متوازيين وبعين هذا السبب يكون هـ ك مساويا ى و واذن يكون ل ع مساويا هـ ك وبناء عليه يكون المثلثان ل ع م , هـ ك ى متساويين لان فيهما الضلع ل ع مساو للضلع هـ ك والزاوية م ل ع مساوية للزاوية ى هـ ك لانهما زاويتان متناظرتان بالنسبة للمستقيمين المتوازيين ل ع , هـ ك والقاطع ا ى والزاوية م ع ل مساوية للزاوية ى ك هـ لتوازى أضلاعهما المتناظرة واتجاهها فى جهة واحدة وينتج من تساويهما أن م ل = ى هـ ويمثل ذلك يبرهن على تساوى باقى أجزاء المستقيم ا ح وحينئذ فينقسم اهـ الى ثلاثة أجزاء متساوية وينقسم هـ ح الى جزأين متساويين وتكون النسبة بينهما مساوية الى $\frac{٣}{٢}$ وهى عين النسبة الكائنة بين ا ى , ى ب ويحدث $\frac{اى}{ىب} = \frac{اهـ}{هـح}$

وأما اذا لم يكن المستقيمان ا ى , ى ب متناسبين فانه يبرهن بمثل ما سبق ذكره نمرة (٨٠ جزء أول) على أن النسبتين $\frac{اى}{ىب}$ و $\frac{اهـ}{هـح}$ محصورتان بين عددين متواليين من أجزاء الاعشار أو من أجزاء المئين أو من أجزاء الالوف وهكذا واذن فهما متساويتان

نتيجة ١ - يمكن وضع التناسب $\frac{اى}{ىب} = \frac{اهـ}{هـح}$ على الصور الآتية

$$\frac{اى}{اهـ} = \frac{ىب}{هـح} \qquad (١)$$

$$\frac{اى}{اى+ىب} = \frac{اهـ}{اهـ+هـح} \quad \text{أو} \quad \frac{اى}{اب} = \frac{اهـ}{اح} \quad \text{أو} \quad \frac{اى}{اهـ} = \frac{اب}{اح} \qquad (٢)$$

$$\frac{اى+ىب}{ىب} = \frac{اهـ+هـح}{هـح} \quad \text{أو} \quad \frac{اب}{ىب} = \frac{اح}{هـح} \quad \text{أو} \quad \frac{اب}{اح} = \frac{ىب}{هـح} \qquad (٣)$$

نتيجة ٢ - اجزاء المستقيمين ا ب , ح ى المحصورة بين المستقيمات المتوازية ا ح , هـ و , ح ط , ب ى الخ تكون متناسبة (شكل ١١٨)

فاذا كانت م نقطة تلاقى المستقيمين ا ب , ح ى فان المثلث م هـ و يكون فيه المستقيم ا ح موازيا للقاعدة ويؤخذ منه أن

$$\frac{مهـ}{مو} = \frac{اهـ}{حو}$$

ويؤخذ أيضا من المثلث م ح ط ان

$$\frac{م ه}{م و} = \frac{ه ح}{و ط}$$

وبمقارنة هذا التناسب بالسابق ينتج ان

$$\frac{ا ه}{ح و} = \frac{ه ح}{و ط}$$

وبمثل ذلك يبرهن على أن

$$\frac{ه ح}{و ط} = \frac{ح ب}{ط ى}$$

وحينئذ يكون

$$\frac{ا ه}{ح و} = \frac{ه ح}{و ط} = \frac{ح ب}{ط ى}$$

وهو المطلوب

دعوى نظـــــرية

(١٢٢) عكس النظرية السابقة صحيح أعني اذا قسم مستقيم ضلعى مثلث الى أجزاء متناسبة يكون موازيا لقاعدته (شكل ١١٩)

أعنى اذا كان $\frac{ا ى}{ى ب} = \frac{ا ه}{ه ح}$ يكون ى ه موازيا ب ح

وللبرهنة على ذلك يقال ان لم يكن ى ه موازيا ب ح لكان غيره ى و مثلا مارا بنقطة ى وبحدث على مقتضى النظرية السابقة ان $\frac{ا ى}{ى ب} = \frac{ا و}{و ح}$ وبمقارنة هذا التناسب بالتناسب المفروض وهو $\frac{ا ى}{ى ب} = \frac{ا ه}{ه ح}$ يتحصل منهما ان $\frac{ا و}{و ح} = \frac{ا ه}{ه ح}$ وهو تناسب فاسد لان بسط الكسر الاول او أصغر من بسط الكسر الثانى ا ه ومقام الاول و ح أكبر من مقام الثانى ه ح وحينئذ لا يمكن أن يكون ى و مستقيما آخر خلاف ى ه وهو المطلوب

دعوى نظـــــرية

(١٢٣) المستقيم المنصف لاحدى زوايا مثلث أو المكملة لها يحدد على قاعدته أو على امتدادها نقطة تكون النسبة بين بعديها عن نهايتي القاعدة مساوية للنسبة الكائنة بين بعدى رأسه عن نهايتي القاعدة المذكورة (شكل ١٢٠)

(الحالة الاولى) — اذا كان المستقيم ا ى منصفا للزاوية ب ا ح يرسم من نقطة ح المستقيم ح هـ موازيا ا ى ويمد حتى يلاقى امتداد المستقيم ب ا فى نقطة هـ

فالمثلث ب هـ ح الحادث فيه المستقيم ا ى موازا للقاعدة ح هـ فيقسم الضلعين ب هـ و ب ح الى أجزاء متناسبه (٢٢١) ويحدث

$$\frac{ى ب}{ى ح} = \frac{ا ب}{ا هـ}$$

لكن المثلث ا ح هـ متساوى الساقين لان فيه زاوية ا ح هـ = زاوية ى ا ح حيث انهما متبادلتان داخلتان بالنسبة للمستقيمين المتوازيين ا ى و ح هـ والقاطع ا ح وكذا فيه زاوية ا هـ ح = زاوية ب ا ى لانهما متناظرتان بالنسبة لعين المستقيمين المتوازيين والقاطع ب هـ وحيث كان الزاويتان ب ا ى , ى ا ح متساويتين فرضا تكون الزاويتان ا ح هـ , ا هـ ح كذلك وحينئذ يكون الضلع ا ح = الضلع ا هـ

فاذا استعوض فى التناسب السابق ا هـ بما يساويه ا ح يحدث $\frac{ى ب}{ى ح} = \frac{ا ب}{ا ح}$ وهو المطلوب

(الحالة الثانية) — اذا كان المستقيم ا و منصفا للزاوية الخارجة ح ا هـ المكملة لزاوية ب ا ح يرسم من نقطة ح المستقيم ح ع موازيا للمستقيم ا و ويمد ا و حتى يلاقى امتداد القاعدة ب ح فى نقطة و

فالمثلث الحادث ب ا و فيه المستقيم ح ع موازلقاعدته ا و فيقسم الضلعين ب ا و ب و الى أجزاء متناسبة ويحدث $\frac{ب و}{ح و} = \frac{ب ا}{ا ع}$

لكن المثلث ع ا ح متساوى الساقين لان فيه زاوية ع ح ا = زاوية ح ا و لانهما متبادلتان داخلتان بالنسبة للمستقيمين ح ع , ا و المتوازيين والقاطع ا ح وكذا زاوية ا ع ح تساوى

زاوية واهـ لانهما متناظرتان بالنسبة لعين المستقيمين المتوازيين والقاطع ب هـ وحينئذ يكون اع = اح فاذا استعوض فى التناسب السابق اع بما يساويه وهو اح يحدث

$\frac{\text{ب و}}{\text{ب ح}} = \frac{\text{ب ا}}{\text{ا ح}}$ وهو المراد

* نتيجة — يمكن أن يعرف مما ذكر المحل الهندسى للنقط التى تكون النسبة بين ابعادها
* عن نقطتين ثابتتين ب و ح مساوية نسبة معلومة $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$
* وللوصول الى ذلك يلاحظ أولا أنه لا يوجد على المستقيم الجامع للنقطتين ب و ح الا
* نقطتان فقط تكون النسبة بين بعدى كل واحدة منهما عن النقطتين ب و ح مساوية
* للنسبة $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ (شكل ١٢١)
* أما بين النقطتين ب و ح فانه لا يوجد الا نقطة
* واحدة فقط مثل ا بحيث يكون $\frac{\text{اب}}{\text{اح}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$ لانه
* لو وجدت نقطة أخرى مثل اَ وحدث $\frac{\text{اَب}}{\text{اَح}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$ وقورن هذا بالتناسب السابق
* لحدث $\frac{\text{اب}}{\text{اح}} = \frac{\text{اَب}}{\text{اَح}}$ وهو تناسب ظاهر الفساد
* ثم اذا فرض ان م > ن فأقول أيضا انه لا يوجد الا نقطة واحدة فقط على امتداد المستقيم
* ب ح مثل نقطة ء بحيث يكون $\frac{\text{ءب}}{\text{ءح}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$ وذلك لانه لو وجدت نقطة أخرى مثل
* نقطة ءَ وتحصل منها $\frac{\text{ءَب}}{\text{ءَح}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$ ثم قارناهذا التناسب بالسابق لظهر أن

$$\frac{\text{ءب}}{\text{ءح}} = \frac{\text{ءَب}}{\text{ءَح}} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{ءب} - \text{ءَب}}{\text{ءح}} = \frac{\text{ءَب} - \text{ءَح}}{\text{ءَح}} = \frac{\text{حب}}{\text{ءح}} = \frac{\text{حب}}{\text{ءَح}}$$

* وهو تناسب فساده بين
* اذا تقرر هذا وفرض ان م احدى نقط المستوى موفية لهذا الشرط وهو $\frac{\text{مب}}{\text{مح}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$
* (شكل ١٢٢)
* فانا نصف الزاوية ح م ب بالمستقيم م ا
* فيحدث على مقتضى هذه النظرية أن

$$\frac{\text{اب}}{\text{اح}} = \frac{\text{مب}}{\text{مح}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$$

ثم اذا نصفنا الزاوية الخارجة ح م هـ بالمستقيم م ء حدث أيضا أن

$$\frac{ب ى}{ى ح} = \frac{م ب}{م ح} = \frac{م}{ن}$$

* وحينئذ يشاهد ان المستقيمين المنصفين لزاويتى أى نقطة من نقط المحل الهندسى مثل نقطة م
* يقابلان المستقيم ب ح فى نقطتين ثابتتين ا ، ى (حيث قد ثبت عدم امكان وجود غيرهما)
* تكون النسبة بين بعدى كل واحدة منهما عن ب و ح مساوية للنسبة $\frac{م}{ن}$
* ولما كان المستقيمان المنصفان للزاويتين المتجاورتين المتكاملتين هما متعامدان ينتج حينئذ
* ان جميع نقط المحل الهندسى كائنة على محيط الدائرة التى قطرها ا ى

* ويمكن البرهنة أيضا على عكس ما ذكر أعنى ان أى نقطة من نقط محيط الدائرة تكون احدى
* نقط المحل الهندسى

* وذلك لانه اذا كانت م احدى نقط المحيط (شكل ١٢٢) فنصل م ح و م ب ونتصف
* زاوية ح م ب بالمستقيم م ا والزاوية المكملة ح م هـ بالمستقيم م ى ونمد المستقيم
* ح هـ موازيا م ا ، ح هـَ موازيا م ى ويحدث

* $\frac{م هـ}{م ب} = \frac{ح ا}{ا ب} = \frac{ن}{م}$ وكذا يحدث $\frac{م هـَ}{م ب} = \frac{ى ح}{ى ب} = \frac{ن}{م}$
* ومنهما ينتج ان م هـ = م هـَ لكنه حيث كانت زاوية هـ ح هـَ قائمة لان ضلعيها موازيان
* بالتناظر للمستقيمين م ا و م ى ينتج ان م هـ = م هـَ = م ح (لانه لو رسم محيط دائرة على
* هـ هـَ وكان مركزه م فانه يمر بنقطة ح ويكون فيه ح م و م هـ و م هـَ أنصاف أقطار)
* واذن يحدث $\frac{م ح}{م ب} = \frac{ن}{م}$ وهو المراد

الفصل الثالث

فى تشابه الاشكال

تعريف

(١٢٤) كثيرا الاضلاع المتشابهان هما اللذان تساوت زواياهما المتناظرة وتناسبت أضلاعهما المتناظرة ونعنى بالاضلاع المتناظرة فى كثيرى الاضلاع المتشابهين الاضلاع المجاورة لزوايا متساوية

اذا دل عدد ن على عدد أضلاع كل واحد من كثيرى أضلاع متشابهين فان شرط تساوى زواياهما المناظرة يتوصل به الى متساويات عددها ن ــ ١ أو الى شروط عددها ن ــ ١ وكذا شرط تناسب الاضلاع يتوصل به الى متساويات أو تناسبات عددها ن ــ ١ وحينئذ فتعريف التشابه يقضى بان الشكلين المتشابهين يجب أن يوفيا شروطا قدرها ٢ ن ــ ٢ ومع ذلك فانا نرى فيما يأتى ان تشابه الشكلين يكفيه فقط شروط عددها ٢ ن ــ ٤

وأما المثلثان المتشابهان فهما اللذان تكون زواياهما المناظرة متساوية وأضلاعهما المناظرة متناسبة ونعنى بالاضلاع المناظرة هنا الاضلاع المقابلة للزوايا المتساوية

وتعريف تشابه المثلثات يحتاج الى أربعة شروط وهى ا = اَ و ب = بَ و $\frac{اب}{اَبَ} = \frac{اح}{اَحَ} = \frac{بح}{بَحَ}$ اذا كان المثلثان هما ا ب ح و اَ بَ حَ

وسنرى فيما يأتى ان وجود شرطين من هذه الشروط الاربعة فى مثلثين يتوصل به الى تحقيق وجود الشرطين الباقيين فيهما وحينئذ فهما كافيان لحصول التشابه

المبحث الاول

فى تشابه المثلثات

(١٢٥) قبل التكلم على تشابه المثلثات نذكر هذه الفائدة

(١٢٦) (فائدة) كل مستقيم يوازى قاعدة مثلث وقاطع ضلعيه الآخرين فانه يحدد مثلثا مشابها للمثلث الأصلى .

أعنى اذا كان المستقيم ى ه موازيا للقاعدة ب ح من المثلث ا ب ح وقاطعا للضلعين ا ح و ا ب (شكل ١٢٣) يكون المثلث ا ى ه مشابها للمثلث ا ب ح وللبرهنة على ذلك يقال



أولا ــ ان زوايا المثلثين متساوية لان زاوية ا مشتركة بينهما وزاوية اه ى = زاوية ح بالتناظر ومثلهما الزاويتان اى ه و ب

ثانيا ــ اذا مد المستقيم ه و موازيا للمستقيم ا ب فانه يحدث على مقتضى نظرية طاليس نمرة ١٢١ توالى هذه المتساويات

$$\frac{اى}{اب} = \frac{اه}{اح} = \frac{بو}{بح}$$

وحيث كان ب و = د هـ لكونهما متوازيين محصورين بين مستقيمين متوازيين يحدث

$$\frac{\text{اد}}{\text{اب}} = \frac{\text{اهـ}}{\text{اح}} = \frac{\text{دهـ}}{\text{بح}}$$

وهو المراد

دعوى نظرية

(١٢٧) اذا تساوت الزوايا المتناظرة من مثلثين تناسبت أضلاعهما المتناظرة ويكونان اذن متشابهين (شكل ١٢٤)

أعنى اذا كانت زاوية ا = اَ , ب = بَ , ح = حَ

يكون

$$\frac{\text{اب}}{\text{اَبَ}} = \frac{\text{اح}}{\text{اَحَ}} = \frac{\text{بح}}{\text{بَحَ}}$$

وللبرهنة على ذلك يؤخذ اد = اَبَ ويرسم المستقيم دهـ موازيا للقاعدة ب ح فالمثلث الحادث ادهـ يكون مشابها للمثلث ا ب ح (فائدة نمرة ١٢٦) وتكون زاوية ادهـ = زاوية ب وزاوية اهـد = زاوية ح ويكون أيضا

$$\frac{\text{اب}}{\text{اد}} = \frac{\text{اح}}{\text{اهـ}} = \frac{\text{بح}}{\text{دهـ}} \qquad (1)$$

وحينئذ فلم يبق علينا سوى البرهنة على ان المثلث ادهـ يساوى المثلث اَبَحَ وهى تحتاج الى البرهنة على ان زاوية ادهـ = بَ وللوصول الى ذلك يقال

ان زاوية ادهـ = زاوية ب بالتناظر وهذه الزاوية الاخيرة تساوى زاوية بَ فرضا فتكون زاوية ادهـ = زاوية بَ وينتج من تساوى المثلثين ان اهـ = اَحَ , دهـ = بَحَ

فاذا أبدل فى المتساوية (١) الاضلاع اد , اهـ , دهـ بما يساويها يحدث

$$\frac{\text{اب}}{\text{اَبَ}} = \frac{\text{اح}}{\text{اَحَ}} = \frac{\text{بح}}{\text{بَحَ}}$$

وهو المطلوب

نتيجة ١ — المثلثان اللذان أضلاعهما المتناظرة متوازية أو متعامدة يكونان متشابهين (نمرة ٥١ جزء أول)

نتيجة ٢ — يكفى لتشابه مثلثين تساوى زاويتين من أحدهما النظيرتيهما من الثانى وحينئذ فيكفى لتشابه مثلثين قائمى الزاوية مساواة زاوية حادة من احدهما النظيرتها من الثانى

دعوى نظـــــرية

(١٢٨) اذا تناسبت الاضلاع المتناظرة من مثلثين تساوت زواياهما المتناظرة ويكونان اذن متشابهين (شكل ١٢٤)

وللبرهنة على ذلك يؤخذ ا ء = اَ بَ ويرسم ء هـ موازيا للقاعدة ب حـ فيكون المثلث ا ء هـ مشابها للمثلث ا ب حـ كما تقدم وتكون زاوية ا ء هـ = زاوية ب وزاوية ا هـ ء = زاوية حـ ويحصل أيضا

$$\frac{\text{اب}}{\text{اء}} = \frac{\text{اح}}{\text{اهـ}} = \frac{\text{بح}}{\text{ءهـ}} \qquad (١)$$

وحينئذ فلم يبق سوى البرهنة على تساوى المثلثين ا ء هـ , اَ بَ حَ وللوصول الى ذلك يقال يؤخذ من المنطوق ان

$$\frac{\text{اب}}{\text{اَبَ}} = \frac{\text{اح}}{\text{اَحَ}} = \frac{\text{بح}}{\text{بَحَ}}$$

وبمقارنة هذا التناسب بالتناسب (١) مع ملاحظة أن ا ء = اَ بَ فانا نستنتج مباشرة ان اَ حَ = ا هـ , بَ حَ = ء هـ وبذلك يكون المثلثان المذكوران متساويين وتكون زاوية ا = اَ وزاوية ا هـ ء = حـ = حَ وزاوية ا ء هـ = ب = بَ وهو المراد

تنبيه — يجب ان يلاحظ هنا ان الزوايا المتساوية فى المثلثين المتشابهين هى المقابلة للاضلاع المتناسبة

دعوى نظـــــرية

(١٢٩) اذا ساوت زاوية من مثلث زاوية أخرى من مثلث آخر وكان الضلعان المحيطان بزاوية المثلث الاول مناسبين للضلعين المحيطين بزاوية المثلث الثانى يكون المثلثان متشابهين (شكل ١٢٤)

أعنى اذا كانت زاوية ا = زاوية اَ وكان $\frac{\text{اب}}{\text{اَبَ}} = \frac{\text{اح}}{\text{اَحَ}}$ يكون المثلثان ا ب حـ , اَ بَ حَ متشابهين

*وللبرهنة على ذلك يؤخذ اد = اَبَ ويرسم ده موازيا للقاعدة ب ح فيكون المثلث الحادث اده مشابها للمثلث اب ح وللبرهنة على تساوى المثلث اده للمثلث اَبَحَ يؤخذ من المثلثين المتشابهين اب ح , اده ان $\frac{\text{اب}}{\text{اد}} = \frac{\text{اح}}{\text{اه}}$ وبمقارنة هذه المتساوية بالمفروضة وهى $\frac{\text{اب}}{\text{اَبَ}} = \frac{\text{اح}}{\text{اَحَ}}$ مع ملاحظة أن اد = اَبَ ينتج أن اه = اَحَ واذن فيتساوى المثلثان المذكوران وهو المراد

تنبيه ـ قد ذكرنا بنمرة ١٢٤ (تعريف) ان تشابه المثلثين يقتضى توفر أربعة شروط فيهما ثم ذكرنا ان وجود اثنين منها كاف لتحقيق وجود الاثنين الآخرين وما سلكناه فى هذه النظرية وسابقتيها محقق لما ذكر وذلك لانه قد فرض فى نظرية (نمرة ١٢٧) ان ا = اَ , ب = بَ وأثبتنا ان $\frac{\text{اب}}{\text{اَبَ}} = \frac{\text{اح}}{\text{اَحَ}} = \frac{\text{بح}}{\text{بَحَ}}$ وكذا قد فرض فى نظرية (نمرة ١٢٨) ان $\frac{\text{اب}}{\text{اَبَ}} = \frac{\text{اح}}{\text{اَحَ}}$ $= \frac{\text{بح}}{\text{بَحَ}}$ وأثبتنا أن ا = اَ , ب = بَ وفى نظرية (نمرة ١٢٩) قد فرض ان ا = اَ , $\frac{\text{اب}}{\text{اَبَ}} = \frac{\text{اح}}{\text{اَحَ}}$ وأثبتنا أن $\frac{\text{اب}}{\text{اَبَ}} = \frac{\text{بح}}{\text{بَحَ}}$, $\frac{\text{اح}}{\text{اَحَ}} = \frac{\text{بح}}{\text{بَحَ}}$

دعوى نظـــــــرية

(١٣٠) المستقيمات الواصلة من رأس المثلث الى قاعدته تقسم هذه القاعدة وما وازاها الى أجزاء متناسبة (شكل ١٢٥)

أعنى يكون

$$\frac{\text{بد}}{\text{بَدَ}} = \frac{\text{ده}}{\text{دَهَ}} = \frac{\text{هو}}{\text{هَوَ}} = \frac{\text{وح}}{\text{وَحَ}}$$

وللبرهنة على ذلك يؤخذ من المثلثات المتشابهة المتركب منها الشكل سلسلة هذه النسب المتساوية

$$\frac{\text{بد}}{\text{بَدَ}} = \frac{\text{اد}}{\text{اَدَ}} = \frac{\text{ده}}{\text{دَهَ}} = \frac{\text{اه}}{\text{اَهَ}} = \frac{\text{هو}}{\text{هَوَ}} = \frac{\text{او}}{\text{اَوَ}} = \frac{\text{وح}}{\text{وَحَ}}$$

وبذلك تثبت النظرية

تنبيه ـ يشاهد مما ذكر ان النسبة الثابتة الكائنة بين الاجزاء المتناظرة من المستقيمين المتوازيين مثل ب ح , بَحَ هى عين النسبة الكائنة بين أى قاطع وجزئه الاول

نتيجـــة ـ عكس هذه النظرية صحيح وتسهل البرهنة عليه

دعوى نظـــــرية

(١٣١) اذا أنزل من رأس المثلث القائم الزاوية عمود على وتره فانه يحدث

أولا — ان المثلثين الجزئيين يكونان متشابهين ويكون كل واحد منهما مشابها للمثلث الاصلى

ثانيا — ان كل ضلع من ضلعى القائمة يكون وسطا متناسبا بين الوتر تمامه وبين مسقطه عليه

ثالثا — ان العمود يكون وسطا متناسبا بين سهمى الوتر (شكل ١٢٦)

فاذا كان ا ب ح مثلثا قائم الزاوية فى ا , ا ى هو العمود

, ب ى مسقط الضلع ا ب على الوتر , ى ح مسقط الضلع

ا ح عليه فانه يبرهن على الاحوال الثلاثة كما يأتى

أولا — ان المثلثين ا ب ى , ا ب ح القائمى الزاوية فيهما

زاوية ب مشتركة فيكونان متشابهين (نتيجة ٢ نمرة ١٢٧)

ومثلهما المثلثان ا ى ح , ا ب ح القائما الزاوية لان فيهما زاوية

ح مشتركة بينهما وحينئذ فيكون المثلثان الجزئيان ا ى ب , ا ى ح متشابهين لتساوى زواياهما المتناظرة

ثانيا — حيث ان المثلثين ا ى ب , ا ب ح متشابهان يحصل

$$\frac{\text{ب ح}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ب ى}} \qquad (١)$$

وكذلك يؤخذ من المثلثين ا ى ح , ا ب ح المتشابهين هذا التناسب

$$\frac{\text{ب ح}}{\text{ا ح}} = \frac{\text{ا ح}}{\text{ى ح}} \qquad (٢)$$

ثالثا — حيث ان المثلثين الجزئيين ا ى ب , ا ى ح متشابهان يحصل أيضا أن

$$\frac{\text{ى ب}}{\text{ا ى}} = \frac{\text{ا ى}}{\text{ى ح}}$$ وهو المراد

نتيجة ١ — اذا اعتبرنا أن الخطوط مقوّمة بأعداد فاننا نستخرج من تناسبى (١) و (٢) أن

$$\overline{\text{ا ب}}^{2} = \text{ب ح} \times \text{ب ى} \ , \ \overline{\text{ا ح}}^{2} = \text{ب ح} \times \text{ى ح} .$$

وهما متساويتان تدلان على سطوح متكافئة ويتوصل منهما الى ما سبق البرهنة عليه من أن مربع أى ضلع من ضلعى القائمة فى المثلث القائم الزاوية يكافئ المستطيل المجاور له الذى هو جزء من المربع المنشأ على وتر القائمة المحدد بامتداد العمود النازل من رأس الزاوية القائمة على وترها نمرة ١١٥ ولو جمعنا هاتان المتساويتان على بعضهما لحدث

$$\overline{اب}^2 + \overline{اح}^2 = ب ح \,(ب ى + ى ح) = \overline{ب ح}^2$$

ومن هـذه المتساوية يعلم أنه قد توصل الى البرهنة على نظرية فيثاغورس بواسطة تشابه المثلثات

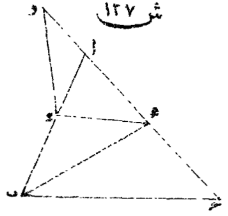
نتيجة ٢ ـ اذا رمز بالرموز ا و ب و ح و ع لاضلاع المثلث القائم الزاوية ولارتفاعه فانه يحدث من المثلثين المتشابهين اب ح و اب ى أن

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ح}{ع} \quad \text{ومنه} \quad ا \times ع = ب \times ح$$

وهى متساوية حقيقية لدلالة كل طرف منها على ضعف مساحة المثلث القائم الزاوية

دعوى نظـــــرية

(١٣٢) اذا اشترك مثلثان فى زاوية تكون النسبة بينهما كالنسبة بين مستطيل الضلعين المحيطين بزاوية المثلث الاول الى مستطيل الضلعين المحيطين بزاوية المثلث الثانى (شكل ١٢٧)



أعنى اذا اشترك المثلثان اب ح و ا ى هـ فى زاوية ا يكون

$$\frac{اب ح}{ا ى هـ} = \frac{ا ح \times اب}{ا هـ \times ا ى}$$

وللبرهنة على ذلك يوصل المستقيم هـ ب فالمثلث ا هـ ب متحد مع المثلث اب ح فى الارتفاع فتكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما أعنى يكون

$$\frac{اب ح}{ا هـ ب} = \frac{ا ح}{ا هـ}$$

وكذا حيث أن المثلثين ا هـ ب و ا هـ ى متحدان فى الارتفاع يحدث

$$\frac{ا هـ ب}{ا هـ ى} = \frac{اب}{ا ى}$$

وبضرب هاتين المتساويتين فى بعضهما وحذف العامل المشترك ا هـ ب يحدث

$$\frac{اب ح}{ا هـ ى} = \frac{ا ح \times اب}{ا هـ \times ا ى} \quad \text{وهو المراد}$$

تنبيـه ـ اذا مد المستقيم هـ ا جهة ا وأخذ عليه البعد ا و = ا هـ ووصل و ى فالمثلث الحادث و ى ا يكون مكافئا للمثلث ا ى هـ لاتحادهما فى القاعدة والارتفاع غير أن

فيه زاوية و ا ى مكملة لزاوية ﻫ ا ى وحينئذ اذا أبدل فى المتساوية السابقة المثلث ا ﻫ ى بالمثلث المكافئ له ا ى و والضلع ا ﻫ بالضلع المساوى له ا و يحدث

$$\frac{\text{ا ب ح}}{\text{ا و ى}} = \frac{\text{ا ح} \times \text{ا ب}}{\text{ا و} \times \text{ا ى}}$$

أعنى أنه اذا وجد فى مثلثين زاويتان متكاملتان فتكون النسبة بينهما كالنسبة بين مستطيل الضلعين المحيطين بزاوية المثلث الاول الى مستطيل الضلعين المحيطين بزاوية المثلث الثانى

دعوى نظـــــرية

(١٣٣) نسبة محيطى المثلثين المتشابهين الى بعضهما كالنسبة بين أى ضلعين متناظرين فيهما والنسبة بين سطحيهما كالنسبة بين مربعى أى ضلعين متناظرين فيهما أيضا (شكل ١٢٨)



برهان الاول يقال يؤخذ من تشابه المثلثين أن

$$\frac{\text{ا ب}}{\text{ى ﻫ}} = \frac{\text{ا ح}}{\text{ى و}} = \frac{\text{ب ح}}{\text{ﻫ و}} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{ا ب} + \text{ا ح} + \text{ب ح}}{\text{ى ﻫ} + \text{ى و} + \text{ﻫ و}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ى ﻫ}}$$

$$\text{أو} \qquad \frac{\text{محيط المثلث ا ب ح}}{\text{محيط المثلث ى ﻫ و}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ى ﻫ}}$$

وبرهان الثانى يقال يؤخذ أيضا من تشابه المثلثين أن

$$\frac{\text{ا ب}}{\text{ى ﻫ}} = \frac{\text{ا ح}}{\text{ى و}}$$

وحيث كانت زاوية ا = زاوية ى فيحدث على مقتضى ما تقرر فى النظرية السابقة أن

$$\frac{\text{ا ب ح}}{\text{ى ﻫ و}} = \frac{\text{ا ب} \times \text{ا ح}}{\text{ى ﻫ} \times \text{ى و}} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{ا ب ح}}{\text{ى ﻫ و}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ى ﻫ}} \times \frac{\text{ا ح}}{\text{ى و}}$$

وحيث ان $\frac{\text{ا ح}}{\text{ى و}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ى ﻫ}}$ يحدث

$$\frac{\text{ا ب ح}}{\text{ى ﻫ و}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ى ﻫ}} \times \frac{\text{ا ب}}{\text{ى ﻫ}} = \frac{\overline{\text{ا ب}}^{2}}{\overline{\text{ى ﻫ}}^{2}}$$

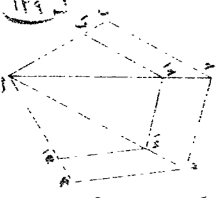
وهو المطلوب

المبحث الثانى
فى تشابه كثيرات الاضلاع

دعوى نظرية

(١٣٤) اذاعلم أى شكل كثير الاضلاع فانه يمكن دائما رسم آخر بحيث يكون هو والمعلوم مركبين من عدد واحد من المثلثات المتشابهة صورة ووضعا (شكل ١٢٩)

فاذا كان ا ب ح ء ه شكلا كثير الاضلاع معلوما ووصل من رأسه ا قطراه ا ح , ا ء ثم فرضت نقطة بَ اختيارية على الضلع ا ب ومد منها المستقيم بَ حَ موازيا الى ب ح ثم مد المستقيم حَ ءَ موازيا الى ح ء والمستقيم ءَ هَ موازيا الى ء ه فان المثلثات الحادثة ا بَ حَ , ا حَ ءَ , ا ءَ هَ تصير متشابهة بالتناظر للمثلثات ا ب ح , ا ح ء , ا ء ه



واذن فالشكلان ا ب ح ء ه , ا بَ حَ ءَ هَ اللذان يمكن اعتبار وضع أحدهما بالنسبة للآخر بطريقة ما قد تركبا من مثلثات متشابهة متحدة العدد ومتماثلة فى الوضع وهو المراد

دعوى نظريه

(١٣٥) كثير الاضلاع المركبان من مثلثات متشابهة متحدة فى العدد ومتماثلة فى الوضع (١٣٤) هما متشابهان (شكل ١٣٠)

فاذا فرض أن المثلثات ا ب ح , ا ح ء , ا ء ه متشابهة بالتناظر للمثلثات اَ بَ حَ , اَ حَ ءَ , اَ ءَ هَ وكانت متماثلة فى الوضع يكون الشكلان ا ب ح ء ه , اَ بَ حَ ءَ هَ متشابهين أعنى أن زواياهما المتناظرة تكون متساوية وأضلاعهما المتناظرة تكون متناسبة

وللبرهنة على ذلك يقال أما تساوى الزوايا المتناظرة من الشكلين فهو نتيجة تشابه المثلثات لان منها ماهو عبارة عن زاويتين متناظرتين من مثلثين متشابهين مثل ب , بَ , ه , هَ ومنها ماهو عبارة عن مجموع زوايا متناظرة من عدة مثلثات متشابهة مثل زاوية ا , اَ

وأما تناسب الاضلاع المناظرة فهو نتيجة تشابه المثلثات أيضا حيث يتوصل منه الى سلسلة التناسبات الآتية

$$\frac{اب}{ا'ب'} = \frac{بح}{ب'ح'} = \frac{اح}{ا'ح'} = \frac{حء}{ح'ء'} = \frac{اء}{ا'ء'} = \frac{ءه}{ء'ه'} = \frac{اه}{ا'ه'}$$

تنبيه — يؤخذ من سلسلة التناسبات هذه أن النسبة بين أى قطرين متناظرين مساوية للنسبة الكائنة بين أى ضلعين متناظرين من كثيرى الاضلاع

نتيجة — اذا دلت ن على عدد أضلاع كل واحد من الشكلين المفروضين فان عدد المثلثات المتركب منها كل واحد منهما يكون مساويا ضرورة الى (ن—٢) وحيث ان تشابه أى مثلثين متناظرين منهما يحتاج الى شرطين فيكون عدد الشروط اللازمة لتشابه كثيرى الاضلاع مساويا ضرورة الى ٢ (ن—٢)=٢ن — ٤ وهو موافق لما سبق التنويه عنه (بنمرة ١٢٤ تعريف)

دعوى نظرية

(١٣٦) وبالعكس كثيرا الاضلاع المتشابهان يتركبان من مثلثات متشابهة متحدة فى العدد ومتماثلة فى الوضع (شكل ١٣١)

وللبرهنة على ذلك يمد من نقطة ا احدى رؤس الشكل ا ب ح ء ه قطراه ا ء , ا ح ثم يمد أيضا من نقطة و احدى رؤس الشكل و ح ط ى ك المناظرة للرأس ا قطراه و ى , و ط ثم يقال حيث ان الشكلين المفروضين متشابهان تكون زاوية ا ب ح مساوية لنظيرتها و ح ط ويكون الضلعان ا ب , ب ح مناسبين للضلعين و ح , ح ط أعنى أن

$$\frac{اب}{وح} = \frac{بح}{حط}$$

وحينئذ يكون المثلثان ا ب ح , و ح ط متشابهين (١٣٢) لاشتراكهما فى زاوية محصورة بين أضلاع متناسبة وينتج من تشابههما أن زاوية ب ح ا = زاوية ح ط و

ثم اذا طرح هاتان الزاويتان المتساويتان من الزاويتين المتساويتين ب ح ء , ح ط ى كان الزاويتان الباقيتان ا ح ء , و ط ى متساويتين ضرورة لكنه حيث كان المثلثان ا ب ح , و ح ط متشابهين يحدث $\frac{اح}{وط} = \frac{بح}{حط}$

وكذا يؤخذ من تشابه كثيري الاضلاع أن

$$\frac{\text{ب ح}}{\text{ح ط}} = \frac{\text{ح ء}}{\text{ط ى}} \quad \text{واذن يكون} \quad \frac{\text{ا ح}}{\text{و ط}} = \frac{\text{ح ء}}{\text{ط ى}}$$

وحيث انه قد سبق البرهنة على أن زاوية ا ح ء = زاوية و ط ى يكون المثلثان ا ح ء و و ط ى متشابهين لاشتراكهما في زاوية محصورة بين أضلاع متناسبة

وبمثل ذلك يبرهن على تشابه باقي المثلثات مهما كان عدد أضلاع الشكلين المفروضين وبذلك يثبت المطلوب

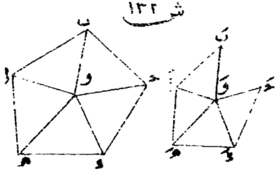
تعريف

(١٣٧) أي نقطتين مثل و , وَ مأخوذتين في مستويي شكلين متشابهين مثل ا ب ح ء هـ , اَ بَ حَ ءَ هـَ يقال لهما متناظرتان متى وصل من كل منهما الى نهايتي ضلعين متناظرين من الشكلين المذكورين مثل ا ب , اَ بَ وكان المثلثان الحادثان ا ب و , اَ بَ وَ متشابهين (شكل ١٣٢)

وأما المستقيمان المتناظران بالنسبة لشكلين متشابهين فهما الواصلان بين نقط متناظرة بالنسبة للشكلين المذكورين

دعوى نظرية

(١٣٨) اذا وصلت كل واحدة من النقطتين المتناظرتين و , وَ بالنسبة للشكلين المتشابهين ا ب ح ء هـ , اَ بَ حَ ءَ هـَ الى كل رأس من رؤس الشكل المنسوبة اليه فان المثلثات الحادثة في الشكلين تكون متشابهة النظير لنظيره أعني يكون المثلث و ب ح مشابها للمثلث وَ بَ حَ والمثلث و ب ء مشابها للمثلث وَ بَ ءَ وهكذا (شكل ١٣٢)



والبرهنة على ذلك يقال

حيث كان الشكلان المفروضان متشابهين تكون زاوية ا ب ح = زاوية اَ بَ حَ وحيث كانت أيضا زاوية ا ب و = زاوية اَ بَ وَ من تشابه المثلثين ا ب و , اَ بَ وَ تكون ضرورة زاوية و ب ح = زاوية وَ بَ حَ

لكنه يؤخذ أولا من تشابه الشكلين ان $\frac{\text{اب}}{\text{ا'ب'}}=\frac{\text{بح}}{\text{ب'ح'}}$ ويؤخذ ثانيا من تشابه المثلثين ا ب و , ا'ب'و' أن $\frac{\text{اب}}{\text{ا'ب'}}=\frac{\text{بو}}{\text{ب'و'}}$ وحينئذ يكون $\frac{\text{بح}}{\text{ب'ح'}}=\frac{\text{بو}}{\text{ب'و'}}$

وحيث قد ثبت أن زاوية و ب ح = زاوية و' ب' ح' يكون المثلثان و ب ح , و' ب' ح' متشابهين وبمثل ذلك يبرهن على تشابه باقي المثلثات النظير لنظيره

تنبيه – ويمكن البرهنة بطرق مماثلة للمتقدمة على ان النسبة بين أى مستقيمين متناظرين بالنسبة للشكلين هي عين النسبة الكائنة بين أى ضلعين متناظرين منهما

دعوى نظرية

(١٣٩) النسبة بين محيطي أى شكلين متشابهين كالنسبة بين ضلعين متناظرين فيهما والنسبة بين سطحيهما كالنسبة بين مربعي الضلعين المذكورين (شكل ١٢٩)

برهان الاول – يقال حيث كان الشكلان متشابهين يحدث

$$\frac{\text{اب}}{\text{ا'ب'}}=\frac{\text{بح}}{\text{ب'ح'}}=\frac{\text{حد}}{\text{ح'د'}}=\frac{\text{ده}}{\text{د'ه'}}=\frac{\text{ها}}{\text{ه'ا'}}$$

ومن سلسلة هذه التناسبات يؤخذ أن

$$\frac{\text{اب}+\text{بح}+\text{حد}+\text{ده}+\text{ها}}{\text{ا'ب'}+\text{ب'ح'}+\text{ح'د'}+\text{د'ه'}+\text{ه'ا'}}=\frac{\text{اب}}{\text{ا'ب'}}\quad \text{أو}$$

$$\frac{\text{محيط ابحده}}{\text{محيط ا'ب'ح'د'ه'}}=\frac{\text{اب}}{\text{ا'ب'}}\quad \text{وهو المطلوب}$$

وبرهان الثاني – يقال حيث كان المثلثان ا ب ح , ا'ب'ح' متشابهين يحدث (١٢٣)

$\frac{\text{ابح}}{\text{ا'ب'ح'}}=\frac{\overline{\text{اح}}^2}{\overline{\text{ا'ح'}}^2}$ وكذا حيث كان المثلثان ا ح د , ا'ح'د' متشابهين يكون

$$\frac{\overline{\text{اح}}^2}{\overline{\text{ا'ح'}}^2}=\frac{\text{احد}}{\text{ا'ح'د'}}$$

ومن هذين التناسبين يؤخذ أن

$$\frac{\text{ابح}}{\text{ا'ب'ح'}}=\frac{\text{احد}}{\text{ا'ح'د'}}$$

وبمثل ذلك يبرهن على أن $\frac{\text{ا ح ى}}{\text{اَ حَ ىَ}} = \frac{\text{ا ى هـ}}{\text{اَ ىَ هـَ}}$

وحينئذ يكون

$$\frac{\text{ا ب ح}}{\text{اَ بَ حَ}} = \frac{\text{ا ح ى}}{\text{اَ حَ ىَ}} = \frac{\text{ا ى هـ}}{\text{اَ ىَ هـَ}} \text{ أو } \frac{\text{ا ب ح + ا ح ى + ا ى هـ}}{\text{اَ بَ حَ + اَ حَ ىَ + اَ ىَ هـَ}} = \frac{\text{ا ب ح}}{\text{اَ بَ حَ}} = \frac{\overline{\text{ا ب}}^2}{\overline{\text{اَ بَ}}^2}$$

أو $\frac{\text{سطح ا ب ح ى هـ}}{\text{سطح اَ بَ حَ ىَ هـَ}} = \frac{\overline{\text{ا ب}}^2}{\overline{\text{اَ بَ}}^2}$ وهو المطلوب

الفصل الرابع

فى أوتار الدائرة وقواطعها

دعوى نظرية

(١٤٠) اذا تقاطع وتران داخل دائرة فان حاصل ضرب جزأى أحدهما مساو لحاصل ضرب جزأى الثانى (شكل ١٣٣) فاذا تقاطع الوتران ا ب , ح ى فى نقطة و يجب أن يكون

$$\text{ا و} \times \text{و ب} = \text{و ح} \times \text{و ى}$$

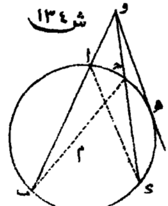
وللبرهنة على ذلك يوصل المستقيمان ح ا , ب ى فالمثلثان الحادثان ا و ح , ب و ى يكونان متشابهين لتساوى الزوايا المتناظرة فيهما حيث ان زاوية ى و ب = زاوية ح و ا لتقابلهما بالرؤس وان زاوية ى = زاوية ا لاتحادهما فى المعيار وهو $\frac{\text{ب ح}}{2}$ واذن فتكون أضلاعهما متناسبة ويحدث

$\frac{\text{ا و}}{\text{و ى}} = \frac{\text{و ح}}{\text{و ب}}$ ومنه ا و × و ب = و ى × و ح وهو المطلوب

* نتيجة ـ حاصل الضرب ا و × و ب الذى لا يتغير مهما تغير وضع الوتر ا ب لا يرتبط
* الا بوضع النقطة و فاذا رمز بحرف ى لبعد نقطة و عن مركز الدائرة وبالرمز س لنصف
* قطر الدائرة ومد من نقطة و قطر حدث ضرورة ل و × و ب = (س + ى) (س ــ ى)
* = س^2 ــ ى^2 ويسمى المقدار (س^2 ــ ى^2) بقوة نقطة و

دعوى نظـــــرية

(١٤١) اذا مدمن نقطة خارج دائرة قاطعان لها فان حاصل ضرب أحد القاطعين بتمامه فى جزئه الخارج يكون مساويا لحاصل ضرب القاطع الثانى بتمامه فى جزئه الخارج (شكل ١٣٤)
أعنى ان $وب \times وا = وى \times وح$



وللبرهنة على ذلك يوصل المستقيمان حب و اى فالمثلثان الحادثان وبح و واى فيهما زاوية و مشتركة وزاوية ب = زاوية ى لاتحادهما فى المعيار فيكونان متشابهين ويحدث

$$\frac{وب}{وى} = \frac{وح}{وا} \quad أو \quad وب \times وا = وى \times وح$$

وهو المطلوب

* نتيجـــة ـ اذا رمز بحرف ى لبعد نقطة و عن المركز وبالرمز س لنصف قطر الدائرة
* ثم وصل بين نقطة و والمركز بمستقيم ومد على استقامته فانه يشاهد أن حاصل الضرب
* الثابت $وب \times وا$ مساو الى $(ى + س)(ى - س) = ى^2 - س^2$ وتسمى هذه الكمية
* بقوة نقطة و

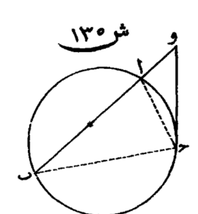
تنبيه ـ اذا تصورنا تحرك القاطع وى حول نقطة و شيأ فشيأ بحيث تقرب النقطتان ح و ى من بعضهما فانه عندما يتحد النقطتان المذكورتان يأخذ المستقيم وى الوضع وهـ ويكون مماسا لمحيط الدائرة ويؤل كل واحد من البعدين وى و وح الى البعد وهـ ويكون بناء على ذلك

$$\overline{وهـ}^2 = وب \times وا \quad أو \quad \frac{وب}{وهـ} = \frac{وهـ}{وا}$$

أعنى أن المماس يكون وسطا متناسبا بين القاطع بتمامه وجزئه الخارج ومع ذلك فانه يمكن البرهنة على هذه النظرية مباشرة

دعوى نظـــــرية

(١٤٢) اذا مدمن نقطة خارج محيط دائرة قاطع لها ومماس فان المماس يكون وسطا متناسبا بين القطع بتمامه وجزئه الخارج (شكل ١٣٥) أعنى ان $\frac{وب}{وح} = \frac{وح}{وا}$



والبرهنة على ذلك نصل المستقيمين اح , حب فالمثلثان الحادثان وحب , وحا فيهما زاوية و مشتركة وزاوية ب = زاوية وحا لاتحادهما فى المعيار $\frac{اح}{٢}$ فيكونان متشابهين ويحدث

$$\frac{وب}{وح}=\frac{وح}{وا} \quad ومنه \quad \overline{وح}^{٢}=وب \times وا$$

وهو المراد

* نتيجة - ينتج مما ذكر ان مربع المماس يدل على مقدار قوة نقطة و وهو (د٢ - س٢)
* ومع ذلك فانه يسهل معرفة ذلك مباشرة اذا لوحظ ان الابعاد د و س و وح يتركب منها
* مثلث قائم الزاوية فى ح ووتره د
* ويمكن تلخيص جميع ما ذكر بخصوص قوة أى نقطة بالنسبة لدائرة فيقال
* ان المقدار د٢ - س٢ يمكن جعله قانونا عاما لبيان قوة أى نقطة مهما كان وضعها وذلك لانه
* اذا جعل ع رمزا لهذا القانون يحدث ع = د٢ - س٢
* فكل نقطة مفروضة خارج الدائرة يكون فيها د > س ويكون حينئذ ع > ٠ أى موجبا
* وكل نقطة مفروضة على محيط الدائرة يكون فيها د = س ويكون حينئذ ع = ٠
* وكل نقطة مفروضة داخل الدائرة يكون فيها د < س ويكون حينئذ ع < ٠ أى سالبا

---

* الفصل الخامس

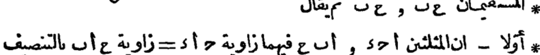
* فى نظريات مهمة تتعلق بالمثلثات وبالاشكال الرباعية
* التى يمكن رسمها داخل الدائرة

---

* دعوى نظرية

* (١٤٣) اذا نصفت احدى زوايا مثلث أو المكملة لها بمستقيم فان مستطيل الضلعين
* المحيطين بها يساوى فى الحالة الاولى مستطيل قسمى القاعدة زايدا مربع المستقيم المنصف
* وفى الثانية مستطيل بعدى نقطة تقابل المستقيم المنصف بامتداد القاعدة عن نهايتيها ناقصا
* مربع المستقيم المنصف (شكل ١٣٦)

* ليكن ا ى منصف الزاوية ب ا ح ، ا ىَ منصف الزاوية ح ا بَ فيكون
* فى الحالة الاولى اب × اح = ح ى × ى ب + اى^2
* وفى الحالة الثانية اب × اح = ح ىَ × ىَ ب − اىَ^{2}
* وللبرهنة على ذلك يرسم محيط دائرة على المثلث ثم يمد
* المستقيم المنصف ا ى على استقامته حتى يقابل المحيط
* فى نقطة ع وسط القوس ح ع ب ويمد أيضا المستقيم
* المنصف ا ىَ على استقامته جهة ا حتى يقابل
* المحيط فى نقطة عَ وسط القوس ح ا عَ ب ويوصل
* المستقيمان ع ب ، عَ ب ثم يقال



* أولا — ان المثلثين ا ح ى ، ا ب ع فيهما زاوية ح ا ى = زاوية ع ا ب بالتنصيف
* وزاوية ا ح ى = زاوية ع لانهما مرسومتان فى قطعة واحدة واذن تكون الزاوية
* ا ى ح = الزاوية ا ب ع ويكون المثلثان متشابهين ويحدث

* اح/اع = اى/اب أو اح × اب = اى × اع = اى (اى + ى ع) = اى^2 + اى × ى ع
* غير أن اى × ى ع = ح ى × ى ب (١٤٠) فيكون اح × اب = ح ى × ى ب + اى^2
* ثانيا — ان المثلثين ا ىَ ح ، ا ب عَ فيهما زاوية ىَ ا ح = زاوية ىَ ا بَ = عَ ا ب
* وكذا زاوية ىَ ح ا = زاوية ب عَ ا لانهما مكملتان للزاويتين المتساويتين ا ح ب و ع
* وحينئذ يكونان متشابهين ويحدث

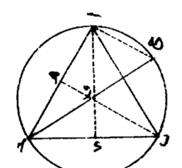
* اح/اعَ = اىَ/اب أو اح × اب = اىَ × اعَ = اىَ (ىَ عَ − اىَ) = اىَ × ىَ عَ − اىَ^{2}
* غير أن اىَ × ىَ عَ = ىَ ح × ىَ ب (١٤١) فيكون اح × اب = ىَ ح × ىَ ب − اىَ^{2}
* وهو المراد

* تنبيه — يتوصل بهذه النظرية الى معرفة مقادير أطوال المستقيمات المنصفة لزوايا المثلث
* اذا علمت أضلاعه حيث انه يسهل حساب مقادير أطوال أجزاء القاعدة ى ب ، ى ح أو
* ىَ ب ، ىَ ح اذا علمت الاضلاع الثلاثة

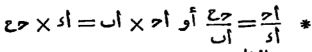
دعوى نظرية

* (١٤٤) مستطيل أى ضلعين من أى مثلث يساوى المستطيل المتكون من ارتفاع المثلث
* المقابل للضلع الثالث ومن قطر الدائرة المرسومة عليه (شكل ١٣٧)
* ليكن ا ب ح المثلث المعلوم و ا ى العمود المقابل للضلع الثالث ب ح و ح ع قطر
* الدائرة المرسومة على المثلث فيكون ا ب × ا ح = ا ى × ح ع
* وللبرهنة على ذلك نصل المستقيم ا ع فالمثلثان

ش ١٣٧



* ا ح ع و ا ى ب القائما الزاوية فيهما زاوية ا ع ح
* تساوى زاوية ا ب ى لاتحادهما فى المعيار اح/٢
* واذن يكونان متشابهين ويحدث



* اح/اى = حع/اب أو اح × اب = اى × حع
* وهو المطلوب

* نتيجة — اذا ضرب طرفا المتساوية الاخيرة فى طول الضلع الثالث ب ح يحدث
* اح × اب × بح = حع × اى × بح
* غير أن الحاصل اى × بح يدل على ضعف مساحة المثلث فاذا جعل م رمز المساحة
* المثلث و س رمز النصف قطر الدائرة حدث
* اح × اب × بح = ٢م × ٢س = م × ٤س
* أعنى أن حاصل ضرب أضلاع المثلث الثلاثة مساو لمساحته مضروبة فى أربعة أمثال نصف
* قطر الدائرة المرسومة عليه

* تنبيه — ويمكن البرهنة على أن مساحة المثلث تساوى حاصل ضرب محيطه مضروبا فى
* نصف نصف قطر الدائرة المرسومة داخله (شكل ١٣٨)
* وذلك لان مجموع المثلثات ب و ح و ح و ا و ا و ب المتحدة

ش ١٣٨

* فى الارتفاع مساو للمثلث الكلى ا ب ح وحيث ان مساحة
* كل واحد منها مساو لحاصل ضرب قاعدته فى نصف ارتفاعه
* فتكون مساحة المثلث الكلى مساوية لحاصل ضرب نصف
* الارتفاع المشترك أو نصف نصف قطر الدائرة المرسومة داخله فى
* مجموع قواعد المثلثات المتركب منها أو فى محيطه ويثبت المطلوب

دعوى نظـــــرية

* (١٤٥) فى كل شكل رباعى مرسوم داخل الدائرة مستطيل قطريه يساوى مجموع
* المستطيلين المتكون كل واحد منهما من ضلعين متقابلين منه (نظرية بطليموس) (شكل ١٣٩)
* وللبرهنة على ذلك يرسم المستقيم ب ى بحيث تكون
* زاوية حـ ب ى = زاوية ا ب د ويمد حتى يلاقى
* المستقيم ا حـ فالمثلث الحادث حـ ب ى يكون
* مشابها للمثلث ا ب د لان فيهما زاوية حـ ب ى =
* زاوية ا ب د عملا وزاوية ب حـ ا = زاوية ب د ا
* لانهما مرسومتان فى قطعة واحدة واذن يتركب هـذا
* التناسب

شكل ١٣٩

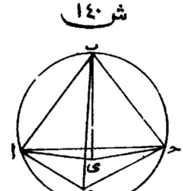
* $\frac{ب حـ}{ب د} = \frac{حـ ى}{ا د}$ ومنه ب حـ × ا د = ب د × حـ ى
* ثم يقال ان المثلثين ا ب ى و ب د حـ متشابهان لان فيهما زاوية ا ب ى = زاوية د ب حـ
* وذلك لان زاوية ا ب د = زاوية ى ب حـ كما تقدم فاذا ضم لكل واحد منهما الزاوية د ب ى
* كان المجموعان ا ب ى , د ب حـ متساويين وفيهما أيضا زاوية ب ا ى = زاوية ب د حـ
* لكونهما مرسومتين فى قطعة واحدة واذن يتركب هذا التناسب
* $\frac{ا ب}{ب د} = \frac{ا ى}{د حـ}$ ومنه ا ب × حـ د = ا ى × ب د
* وبجمع هذه المتساوية على السابقة لها يحدث
* ا ب × حـ د + ب حـ × ا د = ب د (ا ى + حـ ى) = ب د × ا حـ
* وهو المطلوب

دعوى نظـــــرية

* (١٤٦) فى كل شكل رباعى لا يمكن رسمه داخل الدائرة مستطيل قطريه أقل من مجموع
* مستطيلى اضلاعه المتقابلة (شكل ١٤٠) أعنى أن فى الشكل الرباعى ا ب حـ د الذى
* يمر محيط الدائرة بثلاثة من رؤسه فقط دون الرابعة

ا حـ × ب د < ا ب × حـ د + ا د × ب حـ

* وللبرهنة على ذلك نصنع زاوية ا ب ى = زاوية د ب ح وزاوية ب ا ى = زاوية
* ب د ح فالمستقيم ا ى لا يمكن أن يتحد مع ا ح لان
* نقطة د ليست موجودة على المحيط وأن زاوية ب د ح
* مغايرة لزاوية ب ا ح ثم يوصل بعد ذلك المستقيم ى ح
* فالمثلثان ا ب ى ، ب د ح فيهما الزوايا المتناظرة
* متساوية عملا فيكونان متشابهين و يحدث



* $\frac{اب}{بد} = \frac{اى}{دح}$ ومنه $اى \times بد = اب \times حد$
* وأما المثلثان ب ى ح ، ا ب د فان فيهما زاوية
* ى ب ح = زاوية ا ب د وذلك لان زاوية د ب ح = زاوية ا ب ى عملا فاذا طرح
* من كل واحدة منهما الزاوية ى ب د يكون الباقيان ح ب ى ، د ب ا متساويين
* ولمناسبة تشابه المثلثين ا ب ى ، ب د ح يحدث

* $\frac{اب}{بد} = \frac{بى}{بح}$

* واذن يوجد فى المثلثين المذكورين زاوية مشتركة محاطة باضلاع متناسبة فيكونان
* متشابهين و يحدث

* $\frac{اد}{حى} = \frac{بد}{بح}$ ومنه $بد \times حى = اد \times بح$

* وبضم هذه المتساوية على السابقة لها يحدث

* $بد (حى + اى) = اب \times حد + اد \times بح$

* وحيث كان حى + اى > اح يكون $بد \times اح < اب \times حد + اد \times بح$
* وهو المراد

* تنبيه — يستنتج من هذه النظرية ان كل شكل رباعى وجد فيه مستطيل قطريه مساو
* لمجموع مستطيلى أضلاعه المتقابلة فانه يمكن رسمه داخل الدائرة والافلا

---

* دعوى نظرية

* (١٤٧) فى كل شكل رباعى يمكن رسمه داخل الدائرة نسبة أحد قطريه الى قطره الثانى كنسبة
* مستطيل الضلعين المنتهيين باحدى طرفى القطر الاول زائدا مستطيل الضلعين المنتهيين

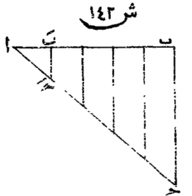
* بطرفه الثانى الى مستطيل الضلعين المنتهيين بأحد طرفى القطر الثانى زائدا مستطيل الضلعين
* المنتهيين بطرفه الثانى (شكل ١٤١)
* أعنى أن اح / اب = (اب × اد + بح × حد) / (اب × بح + اد × دح)
* وللبرهنة على ذلك يقال انه نظرا لانقسام الشكل الرباعى
* ابحد الى المثلثين ابح , احد يحدث بناء على
* ما تقدم (١٤٤)
* اب × بح × اح = ابح × ٤ س ,
* اد × دح × اح = ادح × ٤ س
* وبضمهما الى بعضهما يحدث
* اح (اب × بح + اد × دح) = ٤ س (ابح + ادح) (١)
* ونظرا لانقسام الشكل الرباعى المذكور الى المثلثين ابد , بدح يحدث أيضا
* اد × اب × بد = ابد × ٤ س ,
* بح × حد × بد = بحد × ٤ س
* وبالجمع يحدث
* بد (اد × اب + بح × حد) = ٤ س (ابد + بحد) (٢)
* وبمقارنة المتساوية (١) بالمتساوية (٢) يحدث
* اح (اب × بح + اد × دح) = بد (اد × اب + بح × حد) أو
* اح / بد = (اب × اد + بح × حد) / (اب × بح + اد × دح) وهو المراد

الفصـــــل الســادس

فى الدعاوى العمليــة الاساسيــة

دعوى عمليـــــة

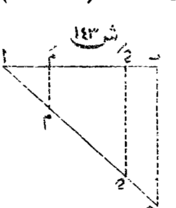
(١٤٨) المطلوب تقسيم مستقيم معلوم الى أجزاء متساوية (شكل ١٤٢) فاذا أريد تقسيم المستقيم المعلوم اب الى خمسة أجزاء متساوية مثلا يقال انا لو تذكرنا ما تقرر بالنتيجة الثانية من نمرة (١٢١) لعلمنا الحل مباشرة فيؤخذ على مستقيم ما خارج من نقطة ا خمسة أبعاد متساوية للبعد الاختيارى اح َ وليكن اح المستقيم المتحصل من ذلك فيوصل المستقيم حب ثم يمرر من نقط تقاسيم اح مستقيمات موازية ب ح فينقسم بذلك المستقيم اب الى خمسة أقسام متساوية



تنبيـــه - وكان يمكن استنتاج حل هذه المسئلة من نظرية نمرة (١٣٠)

دعوى عمليـــــه

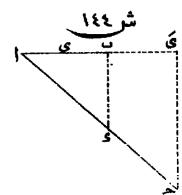
(١٤٩) المطلوب تقسيم مستقيم معلوم الى أجزاء مناسبة لخطوط معلومة (شكل ١٤٣) فاذا أريد تقسيم المستقيم اب الى ثلاثة أجزاء مناسبة لثلاثة خطوط مستقيمة معلومة ام و مد و دح فانه يمد من نقطة ا مستقيم كيفما اتفق اح وتؤخذ عليه المستقيمات الثلاثة المعلومة أحدها بجانب الآخر ثم توصل نهاية المستقيم الحاصل من ذلك وهى ح بنقطة ب ويرسم من نقطتى م و د مستقيمان يوازيان حب فينقسم بذلك المستقيم اب الى أجزاء مناسبة للمستقيمات المعلومة (١٢١)



تنبيـــه ١ - ومع ذلك فانه كان يمكن استنتاج حل هذه المسئلة من نظرية نمرة (١٣٠)

تنبيـــه ٢ - اذا أريد تعيين نقطتين على المستقيم الواصل بين ا و ب بحيث يكون البعدان الواصلان من كل واحدة منهما الى النقطتين ا و ب مناسبين لمستقيمين معلومين م و د يقال (شكل ١٤٤)

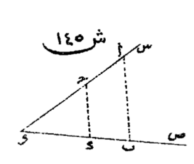
أما تعيين نقطة بين ا و ب موفية للشرط المطلوب فهذا يمكن اجراؤه كما ذكر فى هذه النظرية
وأما اذا أريد تعيين نقطة على امتداد المستقيم اب موفية لهذا الشرط فان هذا يقتضى أن يؤخذ البعد اح مساويا م مثلا ثم يؤخذ البعد ح ء مساويا ن ثم يوصل ء ب ويرسم من نقطة ح المستقيم ح ى َ موازيا ء ب فتكون ى َ هى النقطة المطلوبة لانه يحدث



$\frac{\text{اح}}{\text{اىَ}} = \frac{\text{ءح}}{\text{بىَ}}$ وهو المراد

دعوى عمليـــــة

(١٥٠) المطلوب ايجاد الرابع المتناسب لثلاثة خطوط معلومة (شكل ١٤٥)
اذا كانت الخطوط الثلاثة المعلومة هى ا و ب و ح فان ما تقرر فى النتيجة الثانيـة من (نمرة ١٢١) كاف لمعرفة طريقـة حل هذه المسئلة فترسم زاوية كيفما اتفق س و ص ويؤخذ فى جهتى نقطة و بعدان مساويان للطولين المركبين للنسبة الاولى وهما او = ا و ب و = ب ثم يوصل المستقيم ا ب و يؤخذ على الضلع و س البعد و ح مساو يا للطول الثالث المعلوم ح فاذا رسم ح ء موازيا ا ب فان البعد و ء يكون هو الرابع المتناسب المطلوب لانه يحدث $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ح}}{\text{س}}$



ومع ذلك فانه كان يمكن حل هذه المسئلة بواسطة ما تقرر بنمرة ١٣٠ وعلى العموم جميع النظريات التى يوجد بها أربعة خطوط متناسبة أو التى يكون فيها مستطيل خطين مساويا لمستطيل خطين آخرين يمكن استعمالها لحل مسئلة ايجاد الرابع المتناسب

نتيجة — ليكن المطلوب ايجاد طول المستقيم س بحيث يكون $\text{س} = \frac{\text{ب ح}}{\text{ا}}$ وبعبارة أخرى المطلوب ايجاد ارتفاع مستطيل قاعدته ا يكون مكافئا لمستطيل آخر بعداه معلومان ب و ح فان المسئلة تؤل الى ايجاد الرابع المتناسب للخطوط الثلاثة (بحسب ترتيب الخطوط) ا و ب و ح لانه يحصل هذا التناسب

$$\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ح}}{\text{س}} \quad \text{ومنه} \quad \text{س} = \frac{\text{ب ح}}{\text{ا}}$$

تنبيه ـ اذا كان ب = ح فان الخط س يسمى بالثالث المتناسب بين الخطين ا و ب ويكون $س = \frac{ب^٢}{ا}$

دعوى عمليـــــه

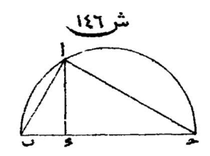
(١٥١) طريقة ايجاد الوسط المتناسب بين مستقيمين معلومين

اذا كان المستقيمان المعلومان هما ا و ب والوسط المتناسب هو س لزم أن يكون

$$\frac{ا}{س} = \frac{س}{ب} \text{ أو } س^٢ = ا \times ب$$

ولحل هذه المسئلة يقال

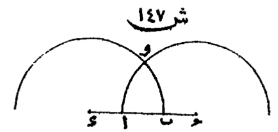
أولا ـ ان خاصية العمود النازل من رأس المثلث القائم الزاوية على وتره يتوصل بها الى حل هذه المسئلة ولذلك يرسم المستقيم ب ح (شكل ١٤٦) مساويا لمجموع الخطين المعلومين احدهما من ب الى ى والثانى من ى الى ح ثم يرسم على المستقيم ب ح نصف دائرة ويقام من نقطة ى العمود ى ا فيكون هو مقدار س المطلوب



ثانيا ـ من المعلوم ان أى ضلع من ضلعى القائمة من المثلث القائم الزاوية وسط متناسب بين الوتر بتمامه و بين مسقط الضلع المذكور عليه وحينئذ فيمكن أن يستخرج من هذه الخاصية حل للمسئلة أنسب من الحل السابق فيما اذا كان ا و ب كبيرين

ثالثا ـ من المعلوم ان مماس الدائرة وسط متناسب بين قاطعها بتمامه وجزئه الخارج وحينئذ فيمكن بواسطة هذه النظرية حل المسئلة التى نحن بصددها

رابعا ـ اذا كان ا ب = ب (شكل ١٤٧) وكان ا ح = ب ى = ا فانه يجعل النقطتان ى و ح مركزين ويرسم محيطا دائرتين بنصف قطر واحد مساو ا فيتقاطع المحيطان فى نقطة و ويكون أحد البعدين و ب أو و ا هو الوسط المتناسب المطلوب



وذلك لانه يحدث ان

$$\overline{و ب}^٢ = ٢ ا^٢ - ٢ ا (ا - \frac{ب}{٢}) = ا \times ب$$

وهى طريقة بسيطة لا تحتاج الا لاستعمال البرجل فقط بعد رسم المستقيم ء حـ

نتيجة ١ ـ يؤخذ من المقدار $س^{٢} = ا × ب$ ان طريقة ايجاد الوسط المتناسب الهندسى يتوصل بها الى حل المسئلة الآتية وهى

طريقة انشاء مربع يكافئ اما مستطيلا أو متوازى أضلاع أو مثلثا أو شبه منحرف معلوما

نتيجة ٢ ـ ويعلم من طريقة ايجاد الوسط المتناسب الهندسى أن الوسط المتناسب الهندسى $\sqrt{ا × ب}$ بين العددين ا و ب هو أقل من الوسط المتناسب العددى $\frac{ا + ب}{٢}$ بين العددين المذكورين

دعوى عمليه

(١٥٢) المطلوب رسم مستطيل يكافئ مربعا معلوما بحيث يكون مجموع ضلعى المستطيل المتجاورين معلوما (شكل ١٤٨)

من المعلوم انه اذا أنزل من رأس المثلث القائم الزاوية عمود على وتره فان هذا العمود يقسم الوتر الى جزأين يكون مستطيلهما مساويا لمربع العمود

شكل ١٤٨

وحينئذ فيؤخذ مستقيم مساو لمجموع البعدين المعلوم طوله ويرسم عليه نصف محيط دائرة ثم يقام من نقطة ا العمود اح على القطر ويؤخذ عليه البعد اح مساويا لضلع المربع المعلوم ويمد من نقطة ح المستقيم حمء موازيا اب فاذا أنزل من نقطة م العمود مد على اب فالمستقيمان اد و دب يكونان هما بعدى المستطيل المطلوب

* نتيجة ـ اذا اريد ايجاد جذرى المعادلة $س^{٢} - ا س + ب^{٢} = ٠$ فكأنه يجب البحث
* عن الخطين سَ و سً بحيث يكون
* $سَ + سً = ا$ و $سَ سً = ب^{٢}$
* وحينئذ فيؤل الامر الى المسئلة المتقدمة
* وأما جذرا المعادلة $س^{٢} + ا س + ب^{٢} = ٠$ فهما مساويان فى المقدار المطلق لجذرى
* المعادلة السابقة ولذا يبحث عنهما بعين الطريقة السابقة
* تنبيه ـ يجب لان تكون المسئلة ممكنة ان لا يتجاوز البعد اح نصف القطر أو أعنى ان
* لا يتجاوز ضلع المربع المعلوم نصف المستقيم اب

* وحينئذ فيكون أكبر المستطيلات الممكنة التي يكون مجموع ضلعيها المتجاورين مساويا
* للمستقيم المعلوم اب هو المربع المرسوم على نصف المستقيم المذكور

دعوى عمليـــــة

(١٥٣) المطلوب رسم مستطيل يكافئ مربعا معلوما بحيث يكون الفرق بين ضلعي المستطيل المتجاورين معلوما (شكل ١٤٩)

لحل هذه المسئلة يقال اننا لو تذكرنا ان مماس محيط الدائرة وسط متناسب بين قاطعها بتمامه وبين جزئه الخارج أعني ان المستطيل الذي بعداه القاطع بتمامه وجزؤه الخارج يكافئ المربع المنشأ على المماس وان الفرق بين القاطع بتمامه وبين جزئه الخارج هو قطر الدائرة لظهر لنا طريقة لحل هذه المسئلة التي نحن بصددها بواسطة ان يرسم على المستقيم المعلوم اب دائرة باعتباره قطرا لها ويقام من نقطة ا العمود اح على هذا القطر ويؤخذ منه البعد اح مساويا للضلع المربع المعلوم ثم يوصل القاطع حه مارا بالمركز فيكون بعدا المستطيل المطلوب هما حه و حد

* نتيجة - اذا اريد ايجاد جذري احدى المعادلتين

* $س^٢ - ا س - ن^٢ = ٠$ و $س^٢ + ا س - ن^٢ = ٠$

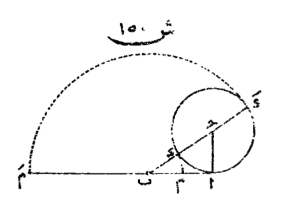
* وجعل $سَ$ و $سً$ رمزين للمقدارين المطلقين لهذين الجذرين وفرض أن $سَ$ هو
* الجذر الاكبر فكأنه يجب ايجاد الخطين اللذين يكونان بحيث ان $سَ - سً = ا$ و
* $سَ سً = ن^٢$ وحينئذ فيرجع الامر الى المسئلة المتقدمة

دعوى عمليـــــة

(١٥٤) المطلوب تقسيم مستقيم معلوم الى قسمة ذات وسط وطرفين (شكل ١٥٠)

أعني اذا علم مستقيم مثل اب وكان المطلوب ايجاد نقطة عليه بحيث يكون بعدها عن نقطة ب وسطا متناسبا بين المستقيم الكلي اب وبين بعدها عن نقطة ا يقال نفرض ان المسئلة محلولة وأن م هي النقطة المطلوبة فيحدث على مقتضى المنطوق ان

$$\frac{اب}{مب} = \frac{مب}{ام} \quad او \quad \frac{اب}{مب} = \frac{اب+مب}{اب}$$



ثم اذا تصورنا تقدير فك الخطوط باعداد يحدث

$$م ب (اب + م ب) = \overline{اب}^2$$

وحينئذ يتوصل الى المقدار م ب بواسطة انشاء مستطيل يكافئ المربع $\overline{اب}^2$ بحيث يكون الفرق بين ضلعى المستطيل مساويا اب وأن أصغر البعدين يدل على م ب وبناء على ماذكر اذا رجعنا الى العملية السابقة أمكن استنتاج طريقة العمل الآتية وهى

يقام من نقطة ا نهاية المستقيم اب عمود مساو نصف اب ثم يرسم محيط دائرة بنصف القطر اح ويوصل نقطة ب بالمركز فالجزء الخارج ب ى من القاطع يدل على الجزء الاكبر من المستقيم اب المنقسم الى قسمة ذات وسط وطرفين

* نتيجة ١ — يمكن تعميم منطوق المسئلة التى نحن بصددها فيقال
* المطلوب تعيين النقط الموجودة على المستقيم اب أو على امتداده الموفية لهذا الشرط وهو
* أن البعد الواصل من أيها الى نقطة ب يكون وسطا متناسبا بين البعد اب وبين بعدها
* عن نقطة ا غير أنه يسهل مشاهدة أنه لا يوجد من هذه النقط الا اثنتان فقط
* وذلك لانه
* أولا — اذا انتقلت نقطة م متحركة من نقطة ب الى نقطة ا فان النسبة $\frac{اب}{م ب}$ تبتدئ
* من اللانهاية له وتنتهى بالوحدة
* وأما النسبة $\frac{م ب}{م ا}$ فانها تبتدئ بالصفر وتنتهى باللانهاية له وحيث ان الكسر الاول كان أولا
* أكبر من الكسر الثانى ثم صار أصغر منه فينتج من ذلك لزوم وجود نقطة مثل م بين ا و ب
* تكون فيها هاتان النسبتان متساويتين وهذه هى النقطة التى سبق التكلم عليها
* ثانيا — اذا انتقلت نقطة م متحركة على امتداد اب جهة ب فان النسبة $\frac{اب}{م ب}$
* تبتدئ أولا باللانهاية له وتنتهى بالصفر وأما النسبة $\frac{م ب}{م ا}$ فانها تبتدئ بالصفر وتنتهى
* بالوحدة (لان البسيط والمقام يصيران لانهائيين) وحيث ان الكسر الاول كان أولا أكبر
* من الثانى ثم صار أصغر منه فيدل ذلك على لزوم وجود نقطة على امتداد اب وعلى شمال
* نقطة ب تكون فيها النسبتان المذكورتان متساويتين بحيث يكون

* $$\frac{مَ ب}{مَ ا} = \frac{اب}{مَ ب} = \frac{مَ ب - اب}{اب} \quad \text{أو} \quad مَ ب (مَ ب - اب) = \overline{اب}^2$$

* ومن ذلك يشاهد أن هـذه النقطة تتعين أيضا بواسـطة رسم مستطيل يكافئ المربع $\overline{اب}^٢$
* و يكون الفرق بين ضلعيه المتجاورين مساويا اب غير أن البعد الاكبر هنا هو مَ ب
* وحينئذ يكفي للوصول الى هذا الحل الثاني أن يؤخـذ القاطع بتمامه ب دَ على امتـداد
* المستقيم اب
* ثالثا — اذا انتقلت نقطة م متحركة على امتداد المستقيم ب ا جهة ا فان النسبة $\frac{اب}{مب}$
* تبتدئ أولا بالوحـدة ثم تنتهي بالصفر وأما النسبة الثانية فانها تبتـدئ باللانهاية وتنتهي
* بالوحدة وحيث ان النسبة الاولى هي دائمـا أصغر من الثانية فهذا يدل على أنه لا يمكن وجود
* نقط على شمـال نقطة ا من امتداد المستقيم اب تكون فيها النسبتان متساويتين

نتيجـة ٢ — ويسهل تعيين مقداري م ب و مَ ب بدالة المستقيم المعلوم اب المرموز له بالحرف ا لانه يحدث على مقتضى ما تقرر بنمرة (١٣١) أن

أولا $م ب = د ب = ح ب - ح د$ ومنه $م ب = \sqrt{ا^٢ + \frac{ا^٢}{٤}} - \frac{ا}{٢} = \frac{ا}{٢}(\sqrt{٥} - ١)$

ثانيا $مَ ب = دَ ب = ح ب + ح د$ ومنه $مَ ب = \sqrt{ا^٢ + \frac{ا^٢}{٤}} + \frac{ا}{٢} = \frac{ا}{٢}(\sqrt{٥} + ١)$

دعوى عمليـــــة

(١٥٥) المطلوب رسم مثلث يكافئ كثير أضلاع معلوما (شكل ١٥١)

لحل هذه المسئلة يكفي أن نبين كيف يمكن تحويل أي شكل كثير الاضـلاع الى آخر يكافئـه يكون عدد رؤسه أقل بواحد من عدد رؤس الاول

ش ١٥١

ليكن د ا ب ح هـ شكلا كثير الاضلاع فنصل أحد أقطاره اح ثم نرسم من الرأس ب المستقيم ب و موازيا لهـذا القطر ونمد حتى يتقابل مع امتداد الضلع هـ ح في نقطة و ثم نوصل أو فالمثلث الحادث اح و يكون مكافئا للمثلث اح ب لاتحادهما في القاعدة والارتفاع وحينئذ اذا استعوضنا المثلث اح ب بالمثلث اح و فيكون الشكل الرباعي ا د هـ و مكافئا للشكل الخماسي المفروض

نتيجـة ١ — يمكن تحويل أي شكل كثير الاضلاع الى مربع يكافئه وذلك لانه بعد أن يتحول الشكل المفروض الى مثلث يكافئه فانه يستخرج الوسـط المتناسب بين قاعـدة المثلث الحـادث و بين نصف ارتفاعه فيكون هو ضلع المربع المطلوب

نتيجة ٢ ـ وكذا يمكن تحويل أى شكل كثير الاضلاع الى مستطيل يكافئه معلوم القاعدة لانه بعد تحويل الشكل الى مثلث يكافئه يوضع $ل\,س = \frac{ب\,ع}{٢}$

بفرض أن ل تدل على قاعدة المستطيل المعلومة و ب على قاعدة المثلث و ع على ارتفاعه و س على ارتفاع المستطيل المطلوب وحينئذ يكون س عبارة عن الرابع المتناسب بين الخطوط الثلاثة ل و ب و $\frac{ع}{٢}$

دعوى عمليه

(١٥٦) المطلوب انشاء مربع يكافئ مجموع مربعين أو مربعات معلومة (شكل ١٥٢)

يرمز بالحروف أ و ب و ح و د و ... الخ لاضلاع المربعات المعلومة وبالحرف س لضلع المربع المطلوب وحينئذ يجب أن يرسم المستقيم

$$س = \sqrt{أ^٢ + ب^٢ + ح^٢ + د^٢ + ..}$$

فيرسم مستقيم أح = أ ويقام من نهاية أ عمود عليه ويؤخذ أب = ب فيحدث

$$\overline{ب ح}^٢ = أ^٢ + ب^٢ \quad أو \quad ب ح = \sqrt{أ^٢ + ب^٢}$$

ثم يقام من نقطة ب عمود على حب ويؤخذ منه ب د = ح ويوصل ح د فيحدث

$$\overline{ح د}^٢ = \overline{ح ب}^٢ + ح^٢ = أ^٢ + ب^٢ + ح^٢ \quad أو \quad ح د \sqrt{أ^٢ + ب^٢ + ح^٢}$$

ثم يقام من نقطة د عمود على ح د ويؤخذ منه د هـ = د ويوصل هـ ح فيحدث

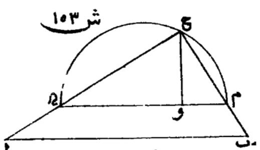
$$\overline{ح هـ}^٢ = \overline{ح د}^٢ + د^٢ = أ^٢ + ب^٢ + ح^٢ + د^٢ \quad أو \quad ح هـ = \sqrt{أ^٢ + ب^٢ + ح^٢ + د^٢} \quad وهكذا$$

نتيجة ـ يستنتج من هذه العملية كيف يمكن رسم المقادير $أ\sqrt{٢}$ و $أ\sqrt{٣}$ و $أ\sqrt{٥}$ وطريقة ذلك أن يرسم الشكل ١٥٢ ويؤخذ فيه أ = ب = ح = د

تنبيه ـ يتوصل بواسطة نظرية نمرة ١١٥ الى طريقة رسم مربع يكافئ الفاضل بين مربعين معلومين

دعوى عمليه

(١٥٧) المطلوب انشاء مربع تكون نسبته الى مربع معلوم كالنسبة بين خطين معلومين (شكل ١٥٣) الخطان المعلومان هما وم = م ، وڹ = ڹ وضلع المربع المعلوم هو ا



لحل هذه المسئلة يقال انه قد ثبت فى نظرية ١١٥ ان النسبة بين المربعين المنشأين على ضلعى القائمة من المثلث القائم الزاوية هى كالنسبة بين مسقطى هذين الضلعين على الوتر وهذه ملحوظة يتوصل بها مباشرة الى طريقة الحل

فيؤخذ على مستقيم غير محدود البعد وم = م والبعد وڹ = ڹ ثم يرسم نصف محيط دائرة على مجموعهما مڹ ويقام من نقطة و العمود وع على مڹ ثم توصل نقطة ع بنقطتى م ، ڹ فيتكون من ذلك مثلث قائم الزاوية فيه

$$\frac{م}{ڹ} = \frac{\overline{عم}^2}{\overline{عڹ}^2}$$

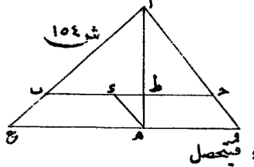
فاذا كان عڹ = ا يكون عم هو ضلع المربع المطلوب والا فيؤخذ ع ا = ا ويرسم اب موازيا مڹ ويحدث

$$\frac{م}{ڹ} = \frac{\overline{عم}^2}{\overline{عڹ}^2} = \frac{\overline{عب}^2}{\overline{عا}^2}$$

واذن يكون عب هو ضلع المربع المطلوب

دعوى عمليه

(١٥٨) المطلوب ايجاد مستقيم تكون نسبته الى مستقيم آخر معلوم كالنسبة بين مربعين معلومين (شكل ١٥٤)



ضلعا المربعين المعلومين هما ب ، حـ والمستقيم المعلوم هو م

يرسم زاوية قائمة غير محدودة الضلعين ويؤخذ على ضلعيها اب = ب ، احـ = حـ ويوصل ب حـ وينزل من نقطة ا العمود اط على ب حـ فيتحصل

$$\frac{ب ط}{ط ح} = \frac{\overline{أ ب}^2}{\overline{أ ح}^2} = \frac{ب^2}{ح^2}$$

فاذا كان ط ح مساويا للطول المعلوم م يكون ب ط هو المستقيم المطلوب والا فيؤخذ ح ء = م ويرسم من نقطة ء مستقيم يوازى أ ح فيقابل هو أو امتداده العمود فى نقطة مثل هـ ثم منها المستقيم هـ ع موازيا ب ح ويحدث

$$\frac{هـ ع}{م} = \frac{ب ط}{ط ح} = \frac{ب^2}{ح^2}$$

ويكون ع هـ هو المستقيم المطلوب

نتيجـة — يمكن دائما ايجاد خطين تكون النسبة بينهما كالنسبة بين أى شكلين معلومين وذلك بان يحوّل أولا كل واحد من الشكلين المعلومين الى مربع يكافئه ثم يفرض لاحد الخطين المطلوبين طول اختيارى ويبحث عن الثانى كما مر فى الدعوى المتقدمة

دعوى عمليـة

(١٥٩) المطلوب رسم شكل يشابه آخر معلوما على مستقيم معلوم (شكل ١٥٥)

فاذا كان المستقيم المعلوم أَ بَ مناظرا للضلع أ ب من الشكل المعلوم أ ب ح ء هـ وتذكرنا ما تقرر فى نظريات الاشكال المتشابهة سهل علينا الوصول الى حل هذه المسئلة فيوصل أقطار الشكل المعلوم ثم يبتدأ بانشاء مثلث على الضلع أَ بَ يشابه المثلث أ ب ح بأن ترسم زاوية بَ أَ حَ = ب أ ح وزاوية أَ بَ حَ = أ ب ح ثم يرسم بعد ذلك على الضلع أَ حَ نظير الضلع أ ح مثلث يشابه المثلث أ هـ ح كما مر ويستمر العمل حتى ينتهى تشكيل الشكل أَ بَ حَ ءَ هـَ الذى يتركب اذن من مثلثات مشابهة لمثلثات الشكل المعلوم ومتحدة معها فى العدد ومماثلة لها فى الوضع

ش ١٥٥

دعوى عمليــــــه

(١٦٠) المطلوب رسم شكل يشابه شكلين معلومين متشابهين ويساوى مجموعهما أو التفاضل بينهما

اذا كان الشكلان المعلومان هما ح و ك وضلعاهما المتناظران هما ا و ب ورمز للشكل المطلوب بالحرف ص ولضلعه المناظر للضلعين المعلومين بالحرف س وفرض أن المسئلة محلولة ففى حيث أن الشكلين ح و ك متشابهان يحدث

$$\frac{ح}{ك} = \frac{ا^2}{ب^2} \quad \text{أو} \quad \frac{ح}{ح \pm ك} = \frac{ا^2}{ا^2 \pm ب^2}$$

وحيث ان الشكل المطلوب ص يجب أن يكون مشابها لكل واحد من الشكلين المعلومين لزم أن يكون

$$\frac{ح}{ص} = \frac{ا^2}{س^2}$$

فاذا قارناهذا التناسب بالسابق ولاحظنا أن ص يجب أن يكون مساويا ح + ك لزم أن يكون $س^2 = ا^2 + ب^2$ أعنى يكون س وتر المثلث قائم الزاوية ضلعا قائمته ا و ب

واذا لاحظنا أن ص يجب أن يكون مساويا ح — ك لزم أن يكون $س^2 = ا^2 - ب^2$ أعنى أن س يكون أحد ضلعى مثلث قائم الزاوية وتره ا وضلعه الثالث ب

وحينئذ فقد رجع الامر الى مسئلة نمرة (١٥٦)

دعوى عمليــــــه

(١٦١) المطلوب رسم شكل يشابه شكلا آخر معلوما وتكون نسبته اليه كنسبة خطين معلومين م و ن

اذا كان ح رمزا للشكل المعلوم و ا رمزا لاحد أضلاعه , ص رمزا للشكل المطلوب و ى رمزا لاحد أضلاعه المناظر للضلع ا فانه يحدث على مقتضى المنطوق أن

$$\frac{ص}{ح} = \frac{م}{ن}$$

وحيث ان الشكلين يجب أن يكونا متشابهين يحدث أيضا

$$\frac{ص}{ح} = \frac{س^2}{ا^2}$$

ومن هذين التناسبين يحدث

$$\frac{س^2}{ا^2} = \frac{م}{ن}$$

وحينئذ فقد رجع الامر الى نظرية نمرة (١٥٧)

دعوى عمليــــة

(١٦٢) المطلوب رسم شكل يشابه آخر معلوما ع ويكافئ شكلا معلوما أيضا ك

بفرض أن س هو ضلع الشكل ص المجهول المناظر للضلع ا من الشكل المعلوم ع ونفرض أن م و ن ضلعا المربعين المكافئين بالتناظر للشكلين ع و ك فيحدث

$$\frac{س^2}{ا^2} = \frac{ك}{ع}$$

وكذا يحدث أيضا أن

$$\frac{س^2}{ا^2} = \frac{م^2}{ن^2}$$

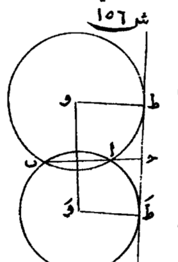
وبأخذ جذر حدود هذا التناسب بفرض أن تلك الخطوط مقدرة بأعداد يحدث

$$\frac{س}{ا} = \frac{م}{ن}$$

واذن يكون س رابعا متناسبا بين الخطوط الثلاثة ا و م و ن

دعوى عمليــــة

(١٦٣) المطلوب رسم دائرة تمر بنقطتين معلومتين ا و ب وتمس مستقيما معلوما حـ ط (شكل ١٥٦)



نفرض أن المسئلة محلولة وأن و هي مركز الدائرة المطلوبة فاذا مد المستقيم ا ب حتى يقابل المستقيم المعلوم في نقطة حـ فمن حيث ان حـ ط يجب أن يكون مماسا لمحيط الدائرة يحدث $\overline{حـ ط}^2 = حـ ب \times حـ ا$ واذن يكون حـ ط وسطا متناسبا بين حـ ا و حـ ب فاذا بحثنا عن مقداره وأخذ في جهتي نقطة حـ بعدان مساويان لطول هذا الوسط المتناسب فانه يتوصل الى حلين للمسئلة

وأما اذا وقع النقطتان ا و ب في جهتي المستقيم المعلوم تكون المسئلة غير ممكنة الحل

تنبيـــه ـ فى حالة مايكون المستقيم ا ب موازيا للمستقيم المعلوم فانه لا يتاتى اجراء العمل المتقدم غير أنه فى هذه الحالة يسهل ايجاد نقطة التماس كما لا يخفى

دعوى عمليـــــة

(١٦٤) المطلوب رسم دائرة تمس مستقيمين معلومين وتمر بنقطة معلومة (شكل ١٥٧)

لحل هـذه المسئلة يقال انه يسهل ترجيعها الى المسئلة المتقدمة أما مركز الدائرة المطلوبة فيوجد على المستقيم المنصف للزاوية الكائنـة بين المستقيمين ثم اذا أنزل من نقطـة ا عمود على المستقيم المنصف وأخذ عليه ل ب = ل ا فان نقطة ب توجد أيضا على محيط الدائرة المطلوبة وحينئــذ فيؤل الامر الى تمرير محيط دائرة يمر بالنقطتين المعلومتين ا و ب ويمس مستقيما معلوما م د

دعوى عمليـــــه

(١٦٥) المطلوب رسم محيط دائرة يمر بنقطتين معلومتين ويمس دائرة معلومة (شكل ١٥٨)

نفرض أن المسئلة محلولة وأن دائرة هـ هى الدائرة المطلوبة فاذا مد من نقطة م مماس مشترك لمحيطى الدائرتين ومد ا ب على استقامته حتى يقابل م ط فى نقطة ط ثم اذا انتخب نقطـة ما مثـل حـ على محيط الدائرة المعلومة ووصل المستقيم ط حـ د فانه يحدث بمقتضى ماسبق بنمرة (١٤٢) أن

$\overline{مط}^2 =$ ط ب × ط ا , $\overline{مط}^2 =$ ط د × ط حـ أو ط ب × ط ا = ط د × ط حـ

واذن فتوجد النقط الاربعة ب , ا , حـ , د على محيط دائرة واحد وحينئذ اذا رسمت

الدائرة التي تمر بالنقط الثلاثة المعلومة ب و ا و ح فانها تعين النقطة الرابعة بتقاطع هذه الدائرة بالدائرة المعلومة وبذلك تعلم طريقة الحل

وهي أن تؤخذ نقطة اختيارية ح على الدائرة المعلومة ويمر بها وبالنقطتين المعلومتين محيط دائرة فيقطع الدائرة المعلومة في نقطة ى فاذا وصل ح ى ومد على استقامته ثم مد اب أيضا حتى يتلاقيا في نقطة ط ورسم المماس طم كانت نقطة م هي نقطة تماس الدائرة المطلوبة بالدائرة المعلومة وأما مركزها فيوجد في تقاطع العمود المقام على وسط الوتر اب مع العمود مه المقام على المماس

لكنه حيث كان يمكن مد مماس آخر للدائرة ط مَ فيكون للمسئلة حلان وتكون نقطة هَ مركز الدائرة الثانية الموفية للشروط المعلومة

ويمثل ذلك يجري العمل لو كان النقطتان داخل الدائرة وأما اذا كانت احدى النقطتين داخل الدائرة المعلومة والثانية خارجها تكون المسئلة غير ممكنة

دعوى عمليــــة

(١٦٦) المطلوب ايجاد المحل الهندسي للنقط التي تكون بحيث ان مجموع مربعي البعدين الواصلين من أيها الى نقطتين معلومتين ثابتتين معلوم وثابت دائما (شكل ١٥٩)

ليكن ب و ح النقطتين المعلومتين الثابتتين و م٢ المربع الثابت المعلوم فاذا كانت ا احدى نقط السطح تحصل على مقتضى المنطوق أن

$$\overline{اب}^2 + \overline{اح}^2 = م^2$$

لكن

$$\overline{اب}^2 + \overline{اح}^2 = ٢\,\overline{او}^2 + ٢\,\overline{بو}^2$$

بفرض أن نقطة و هي وسط المستقيم حب وحينئذ يكون

$$٢\,\overline{او}^2 + ٢\,\overline{وب}^2 = م^2 \quad \text{أو} \quad \overline{او}^2 = \frac{م^2 - ٢\,\overline{وب}^2}{٢} = \frac{م^2}{٢} - \overline{وب}^2$$

وحيث كان م٢ ثابتا و وب نصف بح ثابتا أيضا فيكون مقدار $\overline{او}^2$ ثابتا أعني أن بعد نقطة ا عن نقطة و ثابت دائما واذن فيكون المحل محيط دائرة نصف قطره الضلع الثالث من مثلث قائم الزاوية بوتره يساوي $\frac{١}{٢}$ م $\sqrt{٢}$ وضلعه الآخر بو

دعوى عمليه

المطلوب ايجاد المحل الهندسي للنقط التي تكون بحيث ان الفرق بين مربعي البعدين الواصلين من أيها الى نقطتين معلومتين ثابتتين معلوم وثابت دائما (شكل ١٦٠) ٠

لتكن ا احدى نقط المحل و و ى مسقط الخط المتوسط للمثلث ا ب ح على ب ح وليكن م^٢ المربع المعلوم فعلى حسب المنطوق يكون

$$\overline{اب}^2 - \overline{اح}^2 = م^2$$

وعلى مقتضى ما تقرر في نظرية نمرة ١١٨ يحدث

$$\overline{اب}^2 - \overline{اح}^2 = ٢\ ب ح \times و ى$$

وحينئذ يكون

$$٢\ ب ح \times و ى = م^2 \quad \text{ومنه} \quad و ى = \frac{م^2}{٢ ب ح}$$

وحيث كان كل من م^٢ و ب ح ثابتا فيكون مقدار و ى كذلك ويكون المحل حينئذ هو المستقيم ا ى العمودى على المستقيم الواصل بين النقطتين المعلومتين ويكون بعده عن هذا المستقيم هو الثالث المتناسب للمقدارين ٢ ب ح و م^٢ أو الرابع المتناسب بين الخطوط ٢ ب ح م و م٠

الفصل السابع

تمرينات

١ - اذا دل العددان ٧٥ مترا مربعا و ٢٥ مترا مربعا على مسطحي مستطيلين متحدى القاعدة وكان ارتفاع أكبرهما ١٥ مترا فما مقدار ارتفاع الثاني ،

٢ - اذا دل العددان ١٥ مترو ٥ متر على قاعدتي مستطيلين متحدى الارتفاع وكانت مساحة أصغرهما ٢٥ مترا مربعا فما تكون مساحة المستطيل الثانى

٣ - اذا دل العدد ١٢٠ مترا مربعا على مساحة مستطيل قاعدته ٢٠ مترا والمطلوب تعيين ارتفاع المثلث الذى قاعدته أربعة أمثال قاعدة المستطيل ومساحته ثلاثة أمثال مساحته

٤ ـ اذا دل عدد ٢٥ على النسبة الكائنة بين مربعين فما مقدار النسبة بين ضلعيهما

٥ ـ المطلوب تعيين النسبة الكائنة بين مربعين ضلعاهما ٣ متر و ٦ متر

٦ ـ اذا كان طول العمود النازل من رأس المثلث القائم الزاوية على وتره مساويا ٤ متر وكان طول أحد ضلعي القائمة مساويا ٥ متر ومسقطه على الوتر مساويا ٣ متر والمطلوب تعيين مقدار طول ضلعها الثاني ومقدار مسقطه على الوتر

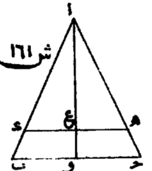
٧ ـ اذا دل عـــدد ١٨ مترا مربعا على مربع وترا لمثلث القائم الزاوية المتساوى الساقين والمطلوب تعيين طول العمود النازل من الرأس على الوتر

٨ ـ اذا دلت الاعداد ٥ متر و ٧ متر و ٩ متر على أطوال أضــلاع مثلث والمطلوب تعيين أطوال المستقيمات المتوسطة له

٩ ـ اذا دل العـــددان ٦ و ٨ على مقاسى ضلعي مثلث ثم وصل بين منتصفيهما بمستقيم طوله ٤٫٥ متر والمطلوب تعيين مقدار ضلعه الثالث

١٠ ـ اذا دلت الاعداد ٢٠ متر و ٢٢ متر و ٣٠ متر على أضلاع مثلث ثم نصفت الزاوية المحصورة بين الضلعين ٢٠ متر و ٢٢ متر بمستقيم والمطلوب تعيين مقدارى سهمى الضلع الثالث المحددين بالمستقيم المنصف

١١ ـ اذا قطع الضلعان اب و اح من المثلث اب ح بالمستقيم ءه الموازى لقاعدته ب ح والمتباعد عنها بالبعد ع والمطلوب حساب بعد المستقيم القاطع ءه عن الرأس ا اذا كان ءه = ١٨ متر و ب ح = ٢٥ متر و ع = ٢٠٫٢٠ متر (شكل ١٦١)



١٢ ـ المطلوب البرهنـــة على أن المستقيم الواصـــل بين منتصفى قطرى شـــبه المنحرف يساوى نصف الفرق بين قاعدتيـــه المتوازيتين

١٣ ـ اذا مدّ فى دائرة نصف قطرها ١٫٢٠ متر وتر طوله متر واحد والمطلوب تعيين بعده عن المركز

١٤ ـ اذا مدّ فى دائرة نصف قطرها ٨ متر وتر طوله ٨ متر والمطلوب حساب سهمى قطر الدائرة العمودى على هذا الوتر والمحددين به

١٥ ـ اذا دل العـــددان ٨ متر و ٣ متر على نصفى قطرى دائرتين والعـــدد ١٥ متر على البعد الكائن بين مركزيهما والمطلوب حساب طول المماس المشترك بينهما فى الخارج

١٦ ـ اذادلت الاعداد ٨ متر و ٩ متر و ١٥ متر على أطوال أضلاع مثلث فما نوع الزاوية المقابلة للضلع الاكبر منه

١٧ ـ اذادل العددان ٨ متر و ١٠ متر على نصفى قطرى دائرتين والعدد ١٢ متر على مقدار البعد بين مركزيهما والمطلوب حساب طول الوتر المشترك بينهما

١٨ ـ المعلوم زاوية ونقطة داخلها والمطلوب مد مستقيم من هذه النقطة قاطعا ضلعى الزاوية بحيث تكون النسبة بين البعدين المحصورين بين هذه النقطة وضلعى الزاوية مساوية $\frac{٢}{٣}$

١٩ ـ المعلوم مستقيم م والمطلوب تعيين مستقيم آخر بحيث يكون مربعه مساويا $\frac{٣}{٥}$ م٢

* ٢٠ ـ طريقة رسم مربع داخل مثلث معلوم

* ٢١ ـ المطلوب تعيين المثلث القائم الزاوية الذى تكون مقادير أضلاعه الثلاثة أعدادا متوالية

* ٢٢ ـ اذا كان الفرق بين ضلعى القائمة من المثلث القائم الزاوية مساويا ٧ متر وكان طول وتره مساويا ١٣ متر والمطلوب حساب ضلعى القائمة *

* ٢٣ ـ المطلوب تعيين أضلاع المثلث القائم الزاوية اذا علم أن طول وتره يزيد عن أحد ضلعى القائمة مترا واحدا وعن الضلع الثانى ثمانية أمتار *

* ٢٤ ـ اذا كان وتر المثلث القائم الزاوية مساويا ٥٥ متر ومجموع الضلعين المحيطين بالقائمة مساويا ٧٧ متر والمطلوب تعيين ضلعى القائمة *

* ٢٥ ـ اذا كان مجموع الاضلاع الثلاثة للمثلث القائم الزاوية مساويا ٦٠ متر والفرق بين الضلعين المحيطين بالقائمة مساويا ٥ متر والمطلوب تعيين أضلاع المثلث القائم الزاوية الثلاثة *

* ٢٦ ـ اذا علم القسم الاكبر من قسمى المستقيم المنقسم الى قسمة ذات وسط وطرفين والمطلوب تعيين طول المستقيم الاصلى *

الباب الثانى

فى الاشكال المنتظمة وقياس الدائرة

تعاريف

(١٦٨) الشكل المنتظم هو شكل تساوت أضلاعه وزواياه

مقدار أى زاوية من أى شكل منتظم مرتبط بعدد أضلاعه فاذا كان ن دالا على عدد أضلاع شكل منتظم كان مجموع الزوايا القائمة الداخلة فيه مساويا $٢ (ن - ٢) = ٢ ن - ٤$

وعليه فقدار كل زاوية يساوى $\frac{٢ن - ٤}{ن} = ٢ - \frac{٤}{ن}$

أبسط الاشكال المنتظمة هو المثلث المتساوى الاضلاع ومقدار زاويته هو $\frac{٢}{٣}$ قائمة

ومما ذكر ينتج أن الشكلين المنتظمين المتحدين فى عدد الاضلاع تكون زواياهما متساوية

(١٦٩) حيث ان الزوايا متساوية فى أى شكلين منتظمين متحدين فى عدد الاضلاع وان النسبة بين أى ضلعين منهما مساوية ضرورة للنسبة الكائنة بين أى ضلعين آخرين فيكونان اذن متشابهين

(١٧٠) يوجد أشكال منتظمة من كل نوع من أنواع الاشكال لاننا لو تصورنا انقسام محيط دائرة الى أجزاء متساوية عددها م ووصل بين نقط التقاسيم المتوالية بمستقيمات فانه يتشكل من ذلك كفير أضلاع منتظم عدد أضلاعه ن وذلك لانه أولا حيث ان أضلاعه أوتار لاقواس متساوية فتكون متساوية وثانيا حيث ان زواياه مرسومة فى قطع متساوية فتكون متساوية أيضا

* (١٧١) اذا قسم محيط دائرة الى أقسام متساوية عددها م ولم نصل بين نقط التقاسيم

* المتوالية بمستقيمات كما سبق ذكر ذلك بل وصل بينها نونا ونونا وكان ن أوليا مع م فاننا نبرهن

* على انا نرجع الى نقطة المبدأ بعد عمليات عددها م

* ولذلك يقال اذا رمز بالحرف ح لمحيط الدائرة فان مقدار كل قسم من الاقسام المنقسم اليها

* يكون مساويا $\frac{ح}{م}$ ومتى وصلت نقط التقاسيم نونا ونونا فان مقدار كل قوس موتر باحد هذه

* الاوتار يكون مساويا الى $\frac{ن ح}{م}$ وحينئذ فلاجل تطبيق وتر هذا القوس على المحيط مرارا

* ثم العودة الى نقطة المبدأ يجب أن يكون تكرار هذا القوس $\frac{ن ح}{م}$ عدة مرات عددها س

* مساويا العدد صحيح من المحيطات نرمز له بحرف ل وبناء عليه يكون

$$\frac{ن ح س}{م} = ل ح \quad \text{أو} \quad \frac{ن س}{م} = ل \qquad (١)$$

وحيث ان ل عدد صحيح لزم أن يكون الكسر $\frac{ن س}{م}$ دالا أيضا على عدد صحيح ولما كان ن أوليا مع م لزم أن يكون $\frac{س}{م}$ عددا صحيحا وحينئذ فاقل مقدار يعطى الى س يكون هو م وهو المطلوب

الشكل المتكون بهذه الصورة يسمى شكلا منتظما نجميا والبرهنة على تساوى أضلاعه وزواياه سهلة غير اننا نلاحظ أيضا أنه يمكن الحصول على عين الشكل المنتظم النجمى المذكور سواء وصل بين نقط التقاسيم نونا نونا كما ذكر أو وصل بينها (م — ن) و (م — هـ) وينتج من ذلك أنه يمكن الوصول الى جميع الاشكال المنتظمة الممكنة التى عددها م بواسطة البحث عن جميع الاعداد الاولية مع م من ابتداء الواحد الى $\frac{م}{٢}$

فاذا فرض الآن وجود عامل مشترك هـ بين م و ن بان كان ن = نَ هـ ، م = مَ هـ مثلا فان المتساوية (١) السابقة تؤل الى

$$\frac{نَ هـ س}{مَ هـ} = ل \quad \text{أو} \quad \frac{نَ س}{مَ} = ل \qquad (٢)$$

وهذه المتساوية الاخيرة تدل على أنه اذا أعطى س مقدارا مساويا مَ فاننا نرجع الى نقطة المبدأ بعد عمليات عددها مَ وبذلك نتوصل الى كثير الاضلاع منتظم عدد أضلاعه مَ ولنطبق ما ذكر على بعض أمثلة فنقول

أولا — اذا قسم المحيط الى خمسة أقسام متساوية ووصل بين نقط التقاسيم المتوالية بمستقيمات فاننا نتوصل الى الشكل الخماسى المنتظم المحدب أما اذا وصل بين نقط التقاسيم اثنتين اثنتين فاننا نرجع الى نقطة المبدأ بعد خمس عمليات حيث ان عدد ٢ أولى مع عدد ٥ وبذلك نتوصل الى الشكل الخماسى المنتظم النجمى

ثانيا — اذا قسم محيط الدائرة الى عشرة أقسام متساوية ووصلت نقط التقاسيم المتوالية بمستقيمات فاننا نتوصل الى الشكل المعشر المنتظم المحدب وأما اذا وصلت ثلاثا ثلاثا فاننا نتوصل الى الشكل المعشر المنتظم النجمى

ثالثا — اذا قسم محيط الدائرة الى خمسة عشر جزأ متساوية ووصلت نقط التقاسيم المتوالية بمستقيمات فاننا نتوصل الى الشكل ذى الخمسة عشر ضلعا المنتظم المحدب وأما اذا وصلت نقط التقاسيم اثنتين اثنتين أو أربعا أربعا أو سبعا سبعا فاننا نتوصل الى الاشكال الثلاثة المنتظمة النجمية ذوات الخمسة عشر ضلعا

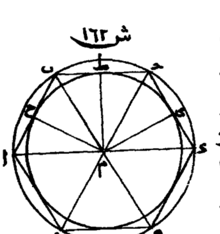
(١٧٢) الخط المنكسر المنتظم هو خط مضلع زواياه متساوية وأضلاعه كذلك ومثل هذه الخطوط المنكسرة المنتظمة ليست دائما أجزاء من أشكال منتظمة وانما يكون لها فقط بعض خواص الاشكال المنتظمة المحدبة

الفصـــــل الاول

فى الاشكال المنتظمة المرسومة داخل الدائرة وخارجها

دعوى نظـــرية

(١٧٣) كل شكل منتظم يمكن أن يرسم عليه محيط دائرة واحد فقط يمر برؤس زواياه وواحد آخر فقط داخله يمس جميع أضلاعه (شكل ١٦٢)



فاذا كان الشكل المنتظم المعلوم هو ا ب حـ د هـ و يقال أولا — يمر بالنقط الثلاث ا و ب و حـ محيط دائرة يكون مركزه كما هو معلوم فى تقاطع العمودين ح م و ط م المقامين على وسطى ا ب و ب حـ ثم يوصل المركز بنقطة د رأس الزاوية التى تلى زاوية حـ فاذا طبقنا الشكل الرباعى م ط ب ا على الشكل الرباعى م ط حـ د بأن نجعل م ط فاصلا مشتركا فان نقطة ب تقع ضرورة على نقطة حـ وبأخذ الضلع ا ب الاتجاه حـ د حيث ان زاوية ب = زاوية حـ وتقع نقطة ا على نقطة د لان الضلع ا ب = الضلع حـ د ويكون م ا = م د وحينئذ فلا بد من أن محيط الدائرة الذى مر بالنقط الثلاث ا و ب و حـ يمر أيضا بنقطة د التالية لها وكذلك لما كان هذا المحيط يمر بالنقط الثلاث ب و حـ و د فلا بد له أن يمر بنقطة هـ التالية لها كما مر وهكذا وبذلك قد ثبت امكان رسم محيط دائرة يمر برؤس الشكل المنتظم المعلوم ويسهل البرهنة على عدم امكان امرار محيط آخر يمر برؤس الشكل المذكور حيث ان كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة لا يمكن أن يمر بها الا محيط دائرة واحدة

ثم اذا وصل من المركز الى جميع رؤس الشكل بمستقيمات فان المثلثات الحادثة من ذلك تكون

متساوية لتساوى الاضلاع الثلاث فيها وحينئذ فالمستقيمات م ا و م ب و ... الخ تكون منصفة للزوايا ا و ب و ح و ... الخ

ثانيا — حيث كانت نقطة م موجودة على جميع المستقيمات المنصفة للزوايا المتساوية ا و ب و ح و ... الخ فتكون جميع الاعمدة النازلة منها على أضلاعها مثل م ع و م ط و ... الخ متساوية وبناء عليه اذا جعلت نقطة م مركزا وبنصف قطر مساو أحدها م ع ورسم محيط دائرة فانه يمر بالنقط ع و ط و ى و ... الخ ويكون مماسا للاضلاع فيها واذن فقد أمكن تمرير محيط دائرة داخل الشكل المفروض يمس أضلاعه

وأما البرهنة على عدم امكان امرار محيط آخر غير السابق فانه لو فرض امكان امرار محيط آخر موف للشرط المتقدم يقال حيث ان مركزه لابد أن يكون على ابعاد متساوية من أضلاع الشكل المذكور فلا يكون موجودا الا فى تقاطع المستقيمات المنصفة للزوايا ا و ب و ح و ... الخ وحينئذ فلا يكون خلاف نقطة م ولا يكون نصف قطره خلاف العمود م ع وهو المطلوب

تنبيـــه ١ — نقطة م التى هى مركز مشترك للدائرتين المرسومتين خارج الشكل وداخله تعتبر أيضا مركزا للشكل ولهـذا السبب يطلق اسم الزاوية المركزية فى الشكل المنتظم على الزاوية ا م ب التى رأسها بالمركز وضلعاها نصفا القطرين الواصلان الى نهايتى الضلع ا ب

ولما كانت أضلاع الشكل كلها متساوية تكون الزوايا المركزية كذلك وحينئذ فقدار أى واحدة منها يساوى خارج قسمة أربع قوائم على عدد أضلاع الشكل

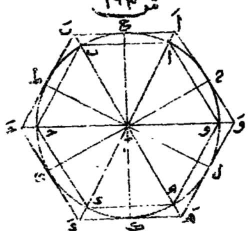
تنبيـــه ٢ — حيث ان برهنة النظرية المتقدمة مؤسسة على تساوى الاضلاع المتوالية ا ب و ب ح و ح ء و ... الخ وعلى تساوى الزوايا المحصورة بينها فينطبق ضرورة على الخط المنكسر المنتظم بمعنى أن كل خط منكسر منتظم يمكن أن يرسم عليه دائرة تمر برؤس زواياه وأخرى داخله تمس أضلاعه

دعوى عمليـــــه

(١٧٤) اذا علم مضلع منتظم ا ب ح ء هـ و مرسوم داخل دائرة والمطلوب رسم شكل منتظم على الدائرة مشابه للاول أى متحد معه فى عدد الاضلاع (شكل ١٦٣)

طريقة ذلك أن ينزل من المركز أنصاف الاقطار م ع و م ط و م ى و ... الخ عمودية على أضلاع الشكل المعلوم ثم يرسم من النقط ع و ط و ى و ... الخ مماسات لمحيط الدائرة فيتشكل بذلك المضلع المنتظم المطلوب

وللبرهنة على ذلك يقال يجب أن يبرهن على أن النقط الثلاثة م و ب و بَ على استقامة واحدة



وللوصول الى ذلك يقال

ان المثلثين القائمى الزاوية ع م بَ و بَ م ط فيهما الوتر م بَ مشترك والضلع م ع = الضلع م ط واذن يكونان متساويين وينتج من تساويهما أن الزاوية المركزية ع م بَ = الزاوية المركزية بَ م ط وبناء عليه فمر المستقيم م بَ بنقطة ب وسط القوس ع ط وبعين هذا السبب توجد النقط حَ و دَ و هَ و ... الخ على امتداد المستقيمات م ح و م د و م ه و ... الخ

لكنه حيث كان أَ بَ موازيا اب و بَ حَ موازيا ب ح تكون زاوية أَ بَ حَ = زاوية ا ب ح وبمثل ذلك تكون باقى زوايا الشكلين متساوية وبذلك يكون الشكل الخارجى متساوى الزوايا

وللبرهنة على تساوى أضلاعه يؤخذ من تشابه المثلثات التى رؤسها بالمركز أن

$$\frac{اب}{أَبَ} = \frac{بح}{بَحَ} = \frac{حد}{حَدَ} = \frac{ده}{دَهَ} = \frac{هو}{هَوَ} = \frac{وا}{وَأَ}$$

وحيث كانت المقدمات متساوية تكون التوالى كذلك

نتيجة ١ — وبالعكس اذا علم شكل منتظم مرسوم خارج الدائرة وكان المطلوب رسم شكل آخر منتظم داخلها مشابه للاول فانه يكفى فى ذلك اما أن يوصل المركز بجميع رؤس الشكل الخارج بمستقيمات تقابل المحيط فى نقط يوصل بينها بأوتار واما أن توصل نقط التماس بأوتار فيتشكل من كل واحدة من هاتين الطريقتين الشكل المطلوب

نتيجة ٢ — ينتج مما تقدم أنه يمكن أن يرسم على أى دائرة جميع الاشكال المنتظمة التى يمكن رسمها داخلها وبالعكس

دعوى عملية

(١٧٥) المطلوب رسم مربع داخل دائرة معلومة (شكل ١٦٤) أعنى أن المطلوب تقسيم محيط دائرة معلومة الى أربعة أقسام متساوية

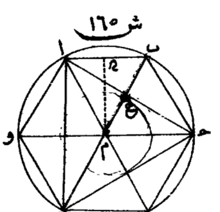
تحل هذه المسئلة مباشرة بواسطة رسم قطرين متعامدين فيه ا ب و ح ء ثم وصل نقطة التقاسيم المتوالية ببعضها بمستقيمات فيتشكل بذلك المربع ا ح ب ء (١٧٠)

نتيجة ١ — اذا رمزنا بالحرف ا لضلع المربع ا ح وبالرمز س لنصف قطر الدائرة و ا فانه يتحصل من المثلث القائم الزاوية ا و ح أن $ا^{٢} = ٢ س^{٢}$ أو $ا = س\sqrt{٢}$ واذن فالكميتان ا و س غير متناسبتين

نتيجة ٢ — اذا قسم كل جزء من أجزاء المحيط الاربعة الى قسمين متساويين ثم قسم كل قسم من هذه الاقسام الى جزءين متساويين وكل واحد من هذه الاجزاء الاخيرة الى جزءين متساويين أيضا وهكذا وفى كل مرة وصلت النقط المتوالية بمستقيمات فانه يتشكل من ذلك المثمن المنتظم المرسوم داخل الدائرة وذو الستة عشر ضلعا المنتظم وذو الاثنين وثلاثين ضلعا المنتظم وهكذا

دعوى عملية

(١٧٦) المطلوب رسم المسدس المنتظم داخل الدائرة (شكل ١٦٥)



نفرض ان المسئلة محلولة وان ا ب هو ضلع المسدس المطلوب أى ان القوس المقابل له هو سدس المحيط فاذا وصل نصفا القطرين م ب و م ا فالمثلث الحادث يكون متساوى الساقين وحيث كانت زاوية ا م ب مساوية $\frac{٤}{٦}$ قائمة أو $\frac{٢}{٣}$ قائمة يكون مجموع الزاويتين الأخريين المتساويتين مساويا $\frac{٤}{٣}$ قائمة وحينئذ يكون مقدار كل واحدة منهما مساويا $\frac{٢}{٣}$ قائمة ويكون المثلث بناء عليه متساوى الاضلاع ويكون ضلعه ا ب مساويا نصف القطر م ا وحينئذ فلاجل رسم المسدس المنتظم داخل الدائرة أو تقسيم محيط دائرة الى ستة أقسام متساوية يطبق نصف القطر على المحيط ست مرات كانه وتر

نتيجة ١ — اذا وصل بين نقط التقاسيم اثنتين اثنتين بمستقيمات تشكل من ذلك المثلث المتساوى الاضلاع ولايجاد النسبة الكائنة بين ضلعه ونصف القطر يلاحظ ان الشكل م ا ب ح شكل معين وعلى مقتضى ما تقرر فى نظرية (نمرة ١١٩ نتيجة ١) يحدث بفرض ان ا يدل على ضلع المثلث

$$\text{ا}^2+\text{س}^2=\text{٤ س}^2 \quad \text{ومنه} \quad \text{ا}^2=\text{٣ س}^2 \quad \text{أو} \quad \text{ا}=\text{س}\sqrt{\text{٣}}$$

وحينئذ يكون ضلع المثلث المتساوى الاضلاع المرسوم داخل الدائرة ونصف قطرها غير متناسبين

ولنلاحظ أولا — ان العمود م ع النازل من مركز الدائرة على أحد أضلاع المثلث المتساوى الاضلاع ا ح هـ مساو نصف نصف قطر الدائرة المذكورة

ثانيا ان العمود م ن النازل من مركز الدائرة على أحد اضلاع المسدس مساو نصف ضلع المثلث المتساوى الاضلاع

نتيجة ٢ — بواسطة تقسيم القوس الى جزءين متساويين تقسيما متواليا يمكن ان يرسم داخل الدائرة جميع المضلعات المنتظمة التى تكون عدد أضلاعها حدود هذه المتوالية

$$\text{٣ ، ٣}\times\text{٢ ، ٣}\times\text{٢}^2\text{ ، ٣}\times\text{٢}^3\text{ ، ٣}\times\text{٢}^4\text{ ، ...}$$

دعوى عمليـــــة

(١٧٧) المطلوب رسم المعشر المنتظم داخل الدائرة (شكل ١٦٦)

ش ١٦٦

نفرض ان المسئلة محلولة وان ا ب هو ضلع المعشر المطلوب فاذا وصل نصفا القطرين و ا ، و ب فالمثلث الحادث ا و ب يكون متساوى الساقين غير أن زاوية و $= \frac{٤}{١٠}$ أو $\frac{٢}{٥}$ قائمة وعليه فيكون مجموع زاويتيه المتساويتين مساويا $\frac{٨}{٥}$ قائمة ويكون مقدار كل واحدة منهما مساويا $\frac{٤}{٥}$ قائمة ثم اذا مد المستقيم المنصف لزاوية ا يكون مقدار زاوية ا م ب مساويا ضرورة $\frac{٤}{٥}$ قائمة واذن يكون كل واحد من المثلثين ا م ب ، ا م و متساوى الساقين ويكون ا ب = ا م = م و لكنه بناء على ما تقرر فى نظرية نمرة ١٢٣ يحدث

$$\frac{\text{ا و}}{\text{و م}}=\frac{\text{ا ب}}{\text{م ب}} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{و ب}}{\text{و م}}=\frac{\text{و م}}{\text{م ب}}$$

وحينئذ يكون ضلع المعشر هو القسم الاكبر من تقسيم نصف القطر الى قسمة ذات وسط وطرفين
نتيجة ١ - اذا جعل س رمزا لنصف قطر الدائرة و ء رمزا لضلع المعشر المنتظم المحدب حدث

$$ء = \frac{س}{٢} (\sqrt{٥} - ١)$$

نتيجة ٢ - اذا وصل بين نقط التقاسيم اثنتين اثنتين فانه يتكون من ذلك المخمس المنتظم المحدب واذا قسم كل قوس من أعشار المحيط الى قسمين متساويين وكل واحد من الاقواس الجديدة الى قسمين متساويين أيضا وهكذا و وصلت نقط التقاسيم المتوالية بمستقيمات تكون من ذلك الاشكال المنتظمة التى تتركب من عدد أضلاعها هذه المتوالية

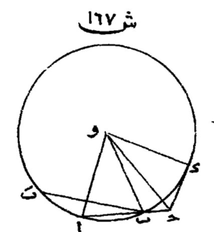
$$٥ \text{ و } ٥ \times ٢ \text{ و } ٥ \times ٢^{٢} \text{ و } ٥ \times ٢^{٣} \text{ و } ...$$

* تنبيه - اذا مد المستقيم ا م على استقامته حتى يلاقى المحيط فى نقطة ى أقول ان هذه
* النقطة هى نهاية القسم الثالث من ابتداء نقطة ا عند تقسيم المحيط الى عشرة أقسام
* متساوية وعليه يكون ا ى هو ضلع المعشر المنتظم النجمى
* وللوصول الى ذلك يقال
* من المعلوم ان المثلث و ا ى متساوى الساقين وان زاوية و ا ى = $\frac{٢}{٥}$ قائمة فتكون
* المساوية لها كذلك و يكون مقدار زاوية ا و ى مساويا $\frac{٦}{٥}$ قائمة وهى ثلاثة أمثال
* مقدار الزاوية المقابلة لضلع المعشر
* ولايجاد مقدار هذا الضلع يقال
* ان فى المثلث و ى م زاوية ى و م = $\frac{٤}{٥}$ قائمة وهى تساوى زاوية و م ى واذن يكون
* و ى = ى م = س ويكون
* $ا ى = ا م + س = ا ب + س = \frac{س}{٢} (\sqrt{٥} - ١) + س = \frac{س}{٢} (\sqrt{٥} + ١)$
* أعنى انه يتوصل الى ضلع المعشر المنتظم النجمى بواسطة قسمة نصف القطر الى قسمة ذات وسط
* وطرفين وأخذ البعد المقابل للحل الثانى المأخوذ على امتداد المستقيم المنقسم

دعوى نظـــــــرية

(١٧٨) ضلع المخمس المنتظم المحـدب المرسوم داخـل الدائرة هو وتر مثلث قائم الزاوية ضلعاه الآخران هما نصف قطر الدائرة وضلع المعشر المنتظم المحدب المرسوم داخلها (شكل ١٦٧)

ليكن اب ضلع المعشر المنتظم المحدب المرسوم داخل الدائرة و فيمدّ اب على استقامته ويؤخذ البعد $\text{اح} = \text{او}$ ثم يوصل وح فيكون هو ضلع المخمس المنتظم لان زاوية $\text{واح} = \frac{4}{5}$ قائمة ثم يرسم من نقطة ح المستقيم حد مماسا لمحيط الدائرة ويوصل ود فاذا أثبتنا ان المماس حد مساو لضلع المعشر المنتظم اب ثبت المطلوب



لذلك يقال من المعلوم ان

$$\overline{\text{حد}}^2 = \text{حا} \times \text{حب} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{حا}}{\text{حد}} = \frac{\text{حد}}{\text{حب}}$$

وحيث كان اب مساويا ضلع المعشر المنتظم و اح مساويا نصف القطر يحدث

$$\frac{\text{حا}}{\text{اب}} = \frac{\text{اب}}{\text{حب}}$$

وحينئذ يكون $\text{حد} = \text{اب}$ وهو المطلوب

نتيجة ١ ـ اذا رمز بالحرف د لضلع المعشر وبالحرف ح لضلع المخمس وبالرمز س لنصف القطر حدث

$$\text{ح}^2 = \text{د}^2 + \text{س}^2 = \frac{\text{س}^2}{4}(\sqrt{5} - 1)^2 + \text{س}^2 = \frac{\text{س}^2}{4}(10 - 2\sqrt{5}) \quad \text{أو}$$

$$\text{ح} = \frac{\text{س}}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

نتيجة ٢ ـ (شكل ١٦٨) يمكن الوصول الى معرفة طول ضلعي المخمس المنتظم والمعشر المنتظم المرسومين داخل الدائرة بطريقة سهلة كما يأتي وهو أن يرسم داخل الدائرة قطران متعامدان اب و حد ثم يرسم من نقطة م وسط نصف القطر دو محيط دائرة بنصف قطر مساو ما فيقطع المستقيم دح في نقطة ه فيكون هو هو ضلع المعشر المنتظم و اه هو ضلع المخمس المنتظم المرسومين داخل الدائرة وذلك لان

$$\overline{\text{ما}}^2 = \overline{\text{مه}}^2 = \overline{\text{س}}^2 + \frac{\text{س}^2}{4} = \frac{5\text{س}^2}{4} \quad \text{أو} \quad \text{ما} = \text{مه} = \frac{\text{س}}{2}\sqrt{5}$$

وحينئذ يكون

$$\text{وه} = \text{مه} - \text{مو} = \text{مه} - \frac{\text{س}}{2} = \frac{\text{س}}{2}\sqrt{5} - \frac{\text{س}}{2} = \frac{\text{س}}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

* وهومقدار ضلع المعشر المنتظم السابق ايجاده بنمرة (١٧٥) وبناء عليه يكون اهـ هو ضلع
* المخمس المنتظم كما ذكر

* تنبيه — بعد تقسيم المحيط الى خمسة أقسام متساوية اذا وصل بين نقط التقاسيم اثنتين
* اثنتين فانه يتشكل ضرورة المخمس المنتظم النجمي ولحساب مقدار ضلعه اح (شكل ١٦٩)
* نصل القطر اب والمستقيم ب ح ضلع المعشر المنتظم
* المحدب فالمثلث القائم الزاوية احب يؤخذ منه

شكل ١٦٩

* $\overline{اح}^2 = \overline{اب}^2 - \overline{بح}^2$

* غير أن

* اب = ٢ س ، حب = $\frac{س}{٢}(\sqrt{٥} - ١)$

* فيكون

* $\overline{اح}^2 = ٤\,\overline{س}^2 - \frac{س^2}{٤}(\sqrt{٥} - ١)^2 = ٤\,\overline{س}^2 - \frac{س^2}{٤}(٦ - ٢\sqrt{٥})$

* $= \frac{س^2}{٤}(١٠ + ٢\sqrt{٥})$ أو اح $= \frac{س}{٢}\sqrt{١٠ + ٢\sqrt{٥}}$

* ويمكن التحقق من أن الضلع اح هو وتر لمثلث قائم الزاوية ضلعاه الآخران هما نصف
* القطر وضلع المعشر المنتظم النجمي
* وذلك لان مجموع مربعي ضلعي القائمة هو

* $س^2 + \frac{س^2}{٤}(\sqrt{٥} + ١)^2 = \frac{س^2}{٤}(١٠ + ٢\sqrt{٥})$

* ويكون مقداره اذن مساويا الى

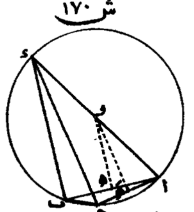
* $\frac{س}{٢}\sqrt{١٠ + ٢\sqrt{٥}}$

* وهو عين المقدار الذى سبق الحصول عليه

دعوى عمليــــــة

(١٧٩) المطلوب رسم الشكل ذى الخمسة عشر ضلعا المنتظم داخل الدائرة (شكل ١٧٠)
ليكن اب وترا مساويا لنصف القطر ، و اح وترا مساويا لضلع المعشر المنتظم المحدب فالقوس
ب ح يعادل $\frac{١}{٦} - \frac{١}{١٠} = \frac{٥}{٣٠} - \frac{٣}{٣٠} = \frac{١}{١٥}$ من محيط الدائرة ويكون وتره ب ح
هو ضلع الشكل ذى الخمسة عشر ضلعا المنتظم المحدب المرسوم داخل الدائرة

* نتيجة ١ – اذا وصل القطر اد والمستقيمان دب و دحـ ثم طبقت نظرية نمرة (١٤٥)
* على الشكل الرباعى اب حـ د يحدث



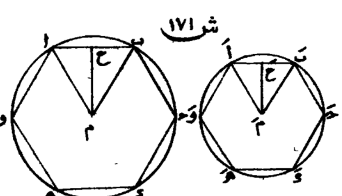
* اد × ب حـ = د حـ × ب ا – ا حـ × د ب
* ويجعل س رمزا لضلع الشكل ذى الخمسة عشر
* المنتظم يحدث
* $٢ نق س = نق × \frac{نق}{٢} \sqrt{١٠ + ٢\sqrt{٥}}$
* $- \frac{نق}{٢} (\sqrt{٥} - ١) نق \sqrt{٣}$ أو
* $س = \frac{نق}{٤} \left\{ \sqrt{١٠ + ٢\sqrt{٥}} - \sqrt{١٥} + \sqrt{٣} \right\}$
* نتيجة ٢ – متى قسم المحيط الى خمسة عشر جزأ متساويه ووصلت نقط التقاسيم اثنتين
* اثنتين أو أربعا أربعا أو سبعا سبعا فانه يتكون من ذلك الاشكال الثلاثة المنتظمة النجمية
* ذوات الخمسة عشر ضلعا ويمكن حساب مقادير أضلاع كل واحد منها بواسطة خاصية الشكل
* الرباعى المرسوم داخل الدائرة الذى سبق استعماله غير أن هذه المقادير مرتبكة ولا فائدة فيها

الفصل الثانى

فى مقارنة المضلعات المنتظمة ببعضها

دعوى نظرية

(١٨٠) النسبة بين محيطى الشكلين المنتظمين المتشابهين كالنسبة بين قطرى الدائرتين المرسومتين خارجهما أو داخلهما والنسبة بين سطحيهما كالنسبة بين مربعات تلك الانصاف الاقطار (شكل ١٧١)



اذا كان الشكلان المنتظمان المعلومان هما اب حـ د هـ و ، اَ بَ حـَ دَ هـَ وَ ونصفا قطرى الدائرتين المرسومتين خارجهما هما م ا ، مَ اَ ونصفا قطرى الدائرتين المرسومتين داخلهما هما م ع ، مَ عَ يقال

أولا ـ حيث ان الشكلين متشابهان يحدث

$$\frac{\text{ا ب}}{\text{ا' ب'}} = \frac{\text{محيط ا ب حـ ء هـ و}}{\text{محيط ا' ب' حـ' ء' هـ' و'}}$$

وحيث ان كل واحد من المثلثين ا م ب و ا م ح يشابه نظيره ا' م' ب' و ا' م' ح' من الشكل الثانى يحدث

$$\frac{\text{م ح}}{\text{م' ح'}} = \frac{\text{ا م}}{\text{ا' م'}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا' ب'}}$$

واذن يكون

$$\frac{\text{م ح}}{\text{م' ح'}} = \frac{\text{ا م}}{\text{ا' م'}} = \frac{\text{محيط ا ب حـ ء هـ و}}{\text{محيط ا' ب' حـ' ء' هـ' و'}}$$

ثانيا ـ ينتج من تشابه الشكلين المنتظمين أن

$$\frac{\overline{\text{ا ب}}^{٢}}{\overline{\text{ا' ب'}}^{٢}} = \frac{\text{سطح ا ب حـ ء هـ و}}{\text{سطح ا' ب' حـ' ء' هـ' و'}}$$

ومن المثلثات المتشابهة يؤخذ

$$\frac{\overline{\text{م ح}}^{٢}}{\overline{\text{م' ح'}}^{٢}} = \frac{\overline{\text{ا م}}^{٢}}{\overline{\text{ا' م'}}^{٢}} = \frac{\overline{\text{ا ب}}^{٢}}{\overline{\text{ا' ب'}}^{٢}}$$

واذن يكون

$$\text{وهو المراد} \quad \frac{\overline{\text{م ح}}^{٢}}{\overline{\text{م' ح'}}^{٢}} = \frac{\overline{\text{ا م}}^{٢}}{\overline{\text{ا' م'}}^{٢}} = \frac{\text{سطح ا ب حـ ء هـ و}}{\text{سطح ا' ب' حـ' ء' هـ' و'}}$$

تعاريف

(١٨١) الكمية المتغيرة هى التى تأخذ على التوالى أحوالا مختلفة من المقادير ونهاية أى كمية هى كمية ثابتة تقرب منها شيأ فشيأ كمية متغيرة بدون أن تبلغها

(١٨٢) يوجد فى علمى الحساب والهندسة أمثال كثيرة للكميات المتغيرة والنهايات نمثل لك بأحدها فنقول

من المعلوم أن مقدار الزاوية فى أى شكل منتظم عدد أضلاعه م هو $\overset{ق}{٢} - \frac{٤}{م}$ (١٦٨)

فاذا فرض ان عدد اضلاع الشكل يأخذ فى النهاية شيأ فشيأ الى غير نهاية فانه يشاهد ازدياد مقدار الزاوية شيأ فشيأ أيضا ومتى كان م عددا كبيرا جدا اقرب الكسر $\frac{٤}{م}$ قربا كليا من الصفر وحينئذ فيقرب مقدار الزاوية قربا كليا من القائمتين واذن تكون نهاية مقدار أى زاوية من الشكل المنتظم قائمتين

(١٨٣) من المعلوم أنه اذا كان للعوامل أَ و بَ و حَ نهايات هى ا و ب و ح كان نهاية الحاصل $أَ \times بَ \times حَ$ هى $ا \times ب \times ح$ أعنى أن نهاية حاصل ضرب عدة عوامل مساو لحاصل ضرب نهايات تلك العوامل

دعوى نظـــــرية

(١٨٤) اذا رسم داخل دائرة وخارجها شكلان منتظمان متحدان فى عدد الاضلاع ثم ضوعف عدد أضلاعهما الى غير نهاية فان محيطيهما يكون لهما نهاية مشتركة وتلك النهاية لا ترتبط بنفس المضلعين الاصليين ولا بالقانون الذى اتبع فى تضعيف عدد الاضلاع

فاذا كان اب ح ى هـ ... الخ المضلع المنتظم المرسوم خارج الدائرة ورمز لمحيطه بالحرف ع وكان اَ بَ حَ ىَ هـَ ... الخ المضلع المنتظم المرسوم داخل الدائرة ومحيطه عَ ثم فرض تقسيم كل واحد من الاقواس أَ بَ و بَ حَ و حَ ىَ و ... الخ الى أجزاء متساوية عددها ك ووصلت نقط التقاسيم المتوالية ببعضها ورسم مماسان من منتصفات الاقواس الجديدة فانه يتكون من ذلك كثيرا أضلاع منتظمان أحدهما خارج الدائرة محيطه $ع_١$ وثانيهما داخلها محيطه $عَ_١$

اذا تقرر هذا يقال

أولا — ان المحيط الجديد الخارج $ع_١$ أصغر من المحيط الخارج الاصلى ع بخلاف المحيطين الداخلين فان المحيط الجديد $عَ_١$ أكبر من المحيط الاصلى عَ وغير ذلك فان أى المحيطين الداخلين أصغر من أى المحيطين الخارجين

ومن هذا يعلم أن كل واحد من المحيطين ع و عَ يقرب من نهاية محدودة

ثم اذا رمزنا بالرمز س لنصف قطر الدائرة المرسومة داخل الشكل ع و سَ لنصف قطر الدائرة المرسومة داخل الشكل عَ تحصل على مقتضى النظرية السابقة

$$\frac{ع}{س} = \frac{عَ}{سَ} = \frac{ع - عَ}{س - سَ} \quad \text{أو} \quad ع - عَ = \frac{ع(س - سَ)}{س}$$

فاذا فرضنا الآن ان عدد الاضلاع فى كلا الشكلين اخذ فى الزيادة الى غير نهاية فان الكمية ع تأخذ فى الصغر شيأ فشيأ وأما الكمية (س — سَ) فانها تأخذ فى التناقص أيضا وتقرب قربا كليا من الصغر وذلك لانه حيث كانت أضلاع كل شكل حادث داخل تكثر بعدا عن المركز من أضلاع الشكل السابق فيزيد مقدار سَ شيأ فشيأ ونهايته هى س وبناء عليه فيقرب المقدار ع — عَ من الصغر ويكون للمحيطين نهاية مشتركة نرمز لها بحرف ﻫ

ثانيا — اذا نظرنا للشكلين المنتظمين الآخرين اللذين محيطاهما هما ع١ و عَ١ وفرضنا تضعيف عدد أضلاعهما الى غير نهاية واتبعنا فى ذلك قانونا غير الذى اتبعناه فى تضعيف عدد أضلاع الشكلين الاصليين وفرض انهما يقربان من نهاية مشتركة لهما ﻫَ فانه يجب ان نبرهن على ان ﻫ = ﻫَ

ولذلك يقال حيث كانت ﻫ هى النهاية التى يقرب منها ع الذى يفوق جميع المحيطات عَ١ فلا يمكن أن تكون أقل من النهاية ﻫَ وهى نهاية المحيطات عَ١ وكذلك حيث كانت النهاية ﻫَ نهاية للمحيطات ع١ التى تفوق جميع المحيطات عَ فلا يمكن ان تكون أقل من ﻫ نهاية المحيطات عَ واذن فيكون ﻫ = ﻫَ

نتيجة ١ — النهاية المشتركة للمحيطين ع و عَ المرسومين خارج الدائرة وداخلها هى ما تسمى بمحيط الدائرة

نتيجة ٢ — ينتج مما تقدم ان طول محيط الدائرة هو دائما أقل من محيط أى شكل منتظم مرسوم خارجها وأكبر من محيط أى شكل منتظم مرسوم داخلها

نتيجة ٣ — يمكن تطبيق جميع البراهين التى سبق ذكرها على جزء من محيط دائرة بواسطة ان يرسم داخله وخارجه خطان منتظمان منكسران وحينئذ فنعتبر طول أى قوس النهاية المشتركة ﻫ لطول خط منكسر منتظم متغير امام رسوم داخل القوس أو خارجه متى ضوعف عدد أضلاعه الى غير نهاية

تنبيه — لا يمكن مقارنة طول قوس من منحن بطول خط مستقيم بل ولا يمكن ان يقال ان احدهما أكبر من الآخر ولهذا قد التزمنا عند مقارنته بالخط المستقيم تعديل طول الخط المنحنى

دعوى نظـــــرية

(١٨٥) اذا رسم داخل الدائرة وخارجها شكلان منتظمان متحدان فى عدد الاضلاع وضوعف عدد أضلاعهما الى غير نهاية فان سطحيهما يكون لهما نهاية مشتركة هى سطح الدائرة (شكل ١٦٣)

فاذا رمزنا بالرمزين س و سَ لسطحي الشكلين المرسومين خارج الدائرة وداخلها ثم قسم كل واحد من الاقواس أ بَ و بَ حَ و حَ ءَ و ... الخ الى أقسام متساوية عددها ك ووصل بين نقط التقاسيم المتوالية بمستقيمات ثم رسم مماسات من نقط أواسط الاقواس الجديدة فانه يتكون من ذلك شكلان منتظمان أحدهما $س_1$ خارج الدائرة وثانيهما $س'_1$ داخلها ثم اذا استمر فى تقسيم الاقواس الحادثة فانا ننتقل من الشكلين $س_1$ و $س'_1$ الى $س_2$ و $س'_2$ ومن $س_2$ و $س'_2$ الى $س_3$ و $س'_3$ وهكذا

ولما كان كل سطح من سطوح الاشكال الخارجة أكبر من سطح الدائرة لاشتماله عليه وكل سطح من سطوح الاشكال الداخلة أقل من سطح الدائرة لانحصاره فيه وانه كلما ضوعف فى عدد الاضلاع فان سطوح الاشكال الخارجة تتناقص وسطوح الاشكال الداخلة تتزايد فلا بد اذن من أن نجزم بان السطوح س و $س_1$ و $س_2$ و $س_3$ و ... الخ تتقارب شيأ فشيأ من نهاية وكذلك السطوح سَ و $س'_1$ و $س'_2$ و $س'_3$ و ... الخ لكنه بناء على ما تقرر بنظرية نمرة ١٧٨ يحدث

$$\frac{س}{ق^2}=\frac{س'}{ق'^2}=\frac{س-س'}{ق^2-ق'^2} \quad \text{أو}$$

$$س-س'=\frac{س\,(ق^2-ق'^2)}{ق^2}=\frac{س\,(ق+ق')\,(ق-ق')}{ق^2}$$

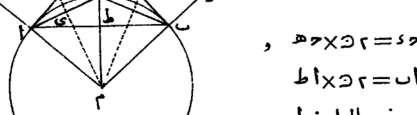
ومن ذلك يعلم انه كلما زيد فى تضعيف عدد الاضلاع الى غير نهاية فان الفرق (س — سَ) يصير كمية صغيرة جدا وبناء عليه فنهاية السطح س هى عين نهاية السطح سَ ولما كان سطح الدائرة محصورا دائما بين هذين السطحين فيكون هو تلك النهاية المشتركة

نتيجة — لا يمكن مقارنة سطح الدائرة مباشرة بسطح المربع المعتبر وحدة لانحناء الدائرة غير انه بواسطة النظرية المتقدمة يتيسر لنا ذلك بواسطة ان نأخذ مساحة الشكلين المذكورين ونبحث عن النهاية التى يقربان منها متى ضوعف عدد أضلاعهما الى غير نهاية

دعوى عمليـــــة

(١٨٦) اذا علم محيطا شكلين منتظمين ح و حَ عدد أضلاع كل واحد منهما ن وكان احدهما مرسوما خارج الدائرة والثانى داخلها والمطلوب تعيين محيطى الشكلين $ح_1$ و $ح'_1$

المنتظمين المرسومين خارج الدائرة وداخلها وعدد أضلاع كل منهما ٢ن (شكل ١٧٢)



لكن حء و اب ضلعين متناظرين من الشكلين المعلومين بحيث ان

$$ح = ن × حء = ٢ن × حھ \quad و$$

$$حَ = ن × اب = ٢ن × اط$$

فنصل اھ ، ھب ونرسم المماسين او ، بح فيحدث

$$ح_١ = ٢ن × حو = ٤ن × ھو \quad ، \quad حَ_١ = ٢ن × اھ = ٤ن × ىھ$$

اذا تقرر هذا يقال

أولا ـ حيث كان مو منصف الزاوية حمھ يحدث

$$\frac{وھ}{مھ} = \frac{وح}{مح} \quad غيران \quad \frac{حَ}{مھ} = \frac{ح}{مح} \quad فيحدث$$

$$\frac{وھ}{حَ} = \frac{وح}{ح} = \frac{حھ}{ح+حَ} \quad أو \quad \frac{ح_١}{حَ} = \frac{٢ح}{ح+حَ} \quad ومن هذا يحدث \quad ح_١ = \frac{٢ححَ}{ح+حَ}$$

ثانيا ـ يؤخذ من المثلثين المتشابهين

وھى ، ھاط ان $\frac{ىھ}{اط} = \frac{وھ}{اھ}$ أو $\frac{٤ن × ىھ}{٢ن × اط} = \frac{٤ن × وھ}{٢ن × اھ}$ أو

$$\frac{حَ_١}{حَ} = \frac{ح_١}{حَ_١} \quad ومنه \quad حَ_١^٢ = حَ ح_١ \quad أو \quad حَ_١ = \sqrt{حَ ح_١}$$ وهو المطلوب ايجاده

نتيجة ـ الارتباطان السابقان يسهلان اذا اعتبرنا بدل المحيطين عكسيهما أعني ان

$$\frac{١}{ح_١} = \frac{١}{٢}\left(\frac{١}{ح} + \frac{١}{حَ}\right) \quad ، \quad \frac{١}{حَ_١} = \sqrt{\frac{١}{ح_١} × \frac{١}{حَ}}$$

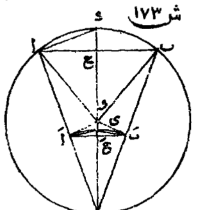
وحينئذ اذا وضعنا لاجل الاختصار $ا = \frac{١}{ح}$ ، $اَ = \frac{١}{حَ}$ ، $ا_١ = \frac{١}{ح_١}$ ، $اَ_١ = \frac{١}{حَ_١}$ يحدث

$$ا_١ = \frac{١}{٢}(ا + اَ) \quad ، \quad اَ_١ = \sqrt{ا_١ اَ}$$

وتسهل البرهنة بواسطة الاعمال الحسابية على ان $اَ_١ - ا_١ < \frac{١}{٤}(اَ - ا)$

دعوى عمليـــــة

(١٨٧) اذا علم س و سَ نصفا قطرى الدائرتين المرسومتين خارج وداخل شكل منتظم والمطلوب ايجاد مقدارى س١ و سَ١ لشكل آخر منتظم متحد معه الأول فى طول المحيط ومضاعف له فى عدد الاضلاع (شكل ١٧٣)



لكن اب ضلع المضلع المعلوم و س = ا و = و ء نصف قطر الدائرة الخارجة و سَ = و ع نصف قطر الدائرة الداخلة

فيمد و ع على استقامته حتى يلاقى المحيط فى نقطة حـ ثم نصل ا حـ و ب حـ وننزل على هذين الوترين العمودين و اَ و و بَ فالمستقيم اَ بَ يعادل نصف اب ضرورة لان كل عمود ينصف الوتر المقابل له وحينئذ فيكون هو ضلع الشكل المتحد مع الأول فى طول المحيط والمضاعف له فى عدد الاضلاع وحيث ان زاوية ا حـ ب نصف زاوية ا و ب فيمكن اعتبار نقطة حـ مركزا لهذا الشكل الجديد ويكون س١ = حـ اَ و سَ١ = حـ عَ

اذا تقرر هذا يقال

أولا ـ حيث ان نقطة عَ كائنة وسط حـ ع أى ان

حـ عَ = ½ حـ ع يكون سَ١ = ½ (س + سَ)

ثانيا ـ يؤخذ من المثلث القائم الزاوية و اَ حـ ان

حـ اَ² = و حـ × عَ حـ = س سَ١ أو س١ = √(س سَ١)

وهو المطلوب ايجاده

نتيجة ـ اذا جعلت نقطة حـ مركزا ورسم قوس من محيط دائرة بنصف قطر مساو حـ اَ ووصل اَ ى فيكون هذا المستقيم منصفا الزاوية و اَ بَ ويحدث ى عَ / ى و = اَ عَ / اَ و

لكنه حيث كان اَ عَ < اَ و فيكون ى عَ < ى و أعنى ان نقطة ى أكثر قربا من نقطة عَ عن المركز و وإذن يكون

ى عَ < ½ و عَ أو ان س١ − سَ١ < ½ و عَ

غيران المثلثين المتشابهين ء أ ح ، و أَ حَ يؤخذ منهما ان وحً = ½ ء ح فيكون اذن

$$\text{ب}_1 - \text{ب}'_1 < \frac{1}{4}(\text{ب} - \text{ب}')$$

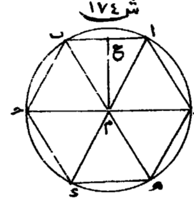
تنبيه — يشاهد ان القانونين اللذين يتوصل منهما الى المقدارين بَ١ و بً١ بدالة ب و بَ هما عين القانونين اللذين يتوصل بهما الى أ١ و أَ١ بدالة أ و أَ (١٨٦)

الفصـــــل الثـالث

فى قياس محيط الدائــــرة ومساحتها

دعوى نظـــــرية

(١٨٨) مساحة الشكل المنتظم تساوى حاصل ضرب محيطه فى ربع قطر الدائرة المرسومة داخله (شكل ١٧٤)



لانه اذا وصل من المركز م الى جميع رؤس الشكل ا ب ح ء هـ و بمستقيمات م ا و م ب و م ح و م ء و ... الخ فان الشكل ينقسم الى المثلثات ا م ب و ب م ح و ح م ء و ... الخ المتحدة جميعها فى القاعدة والارتفاع فاذا ضمت هذه المسائح على بعضها فانه يتوصل الى المساحة المطلوبة

أعنى يكون

$$\text{س} = ٦ \times \text{ا ب ح} = ٦ \times \text{ا ب} \times \frac{\text{ع م}}{٢} = \text{ع} \frac{\text{ب}}{٢}$$

دعوى نظـــــرية

(١٨٩) النسبة بين محيطى الدائرتين كالنسبة بين نصفى قطريهما والنسبة بين سطحيهما كالنسبة بين مربعى نصفى القطرين

أولا — نرسم داخل الدائرتين شكلين منتظمين متحدين فى عدد الاضلاع ونرمز لمحيطيهما بالحرفين ح و حَ ولنصفى قطرى الدائرتين بالرمزين ب و بَ فعلى مقتضى ماتقرر بنمرة (١٨٠) يحدث $\frac{\text{ح}}{\text{حَ}} = \frac{\text{ب}}{\text{بَ}}$

وحيث ان هــذا التناسب حقيق مهما كان عدد أضلاع الشكلين فانه ينطبق أيضا على محيطى الدائرتين اللتين هما نهايتان لهما ويحدث

$$\frac{\text{محيط س}}{\text{محيط سَ}} = \frac{\text{نق}}{\text{نقَ}} \qquad (1)$$

ثانيا — اذا رمز لسطحى الشكلين بالرمزين س و سَ تحصل أيضا بمقتضى نظرية (١٨٠) أن

$$\frac{\text{س}}{\text{سَ}} = \frac{\text{نق}^2}{\text{نقَ}^2}$$

وحيث ان هــذا التناسب حقيق مهما كان عدد أضــلاع الشكلين فينطبق أيضا على سطحى الدائرتين اللتين هما نهايتان لهما ويحدث

$$\frac{\text{سطح س}}{\text{سطح سَ}} = \frac{\text{نق}^2}{\text{نقَ}^2}$$

تنبيــــه — يؤخذ من الارتباط (١) أن

$$\frac{\text{محيط س}}{2\,\text{نق}} = \frac{\text{محيط سَ}}{2\,\text{نقَ}} = \text{ط}$$

أعنى أن النسبة الكائنة بين أى محيط دائرة وقطره ثابتة دائما ويرمز لها عادة بحرف ط وهو مقدار غير منطق أى لا يمكن ايجاد مقداره الا على وجه التقريب

ومعرفة النسبة ط يتوصل بها دائما الى ايجاد طول محيط دائرة نصف قطرها معلوم لانه يؤخــذ من المتساوية

$$\frac{\text{محيط س}}{2\,\text{نق}} = \text{ط} \quad \text{ان المحيط} = 2\,\text{ط}\,\text{نق}$$

أعنى أن طول المحيط مساو لحاصل ضرب النسبة فى القطر

دعوى نظـــــــرية

(١٩٠) مساحة الدائرة تساوى حاصل ضرب طول محيطها فى ربع قطرها

اذا رسم داخل الدائرة شكل منتظم محيطه ح وسطحه س ونصف قطر الدائرة المرسومة داخله نقَ فان مساحته تكون مساوية الى $\text{ح} \times \frac{\text{نقَ}}{2}$

وحيث ان هذا القانون حقيقى مهما كان أضلاع الشكل فيكون حقيقيا ايضا للدائرة التى هى نهاية لهوا اذن يكون

نها س = نها (ح × نق/٢) = نها ح × نها نق/٢ أو سطح الدائرة = ح × نق/٢

ويتوصل الى عين هذا الناتج بواسطة الشكل المرسوم خارج الدائرة

نتيجة — ينتج من هذا القانون انه لاخذ مساحة الدائرة يحتاج الحال الى معرفة طول محيطها لكنه اذا وضع ٢ ط نق بدل المحيط يحدث سطح الدائرة = ط نق٢

دعوى نظـــــرية

(١٩١) مساحة القطاع تساوى حاصل ضرب طول قوسه فى ربع قطر دائرته

لذلك نرمز بالحرف هـ لزاوية القطاع مقدرة بالدرج فمن حيث ان النسبة بين أى قطاع والدائرة التى هو جزء منها هى عين النسبة بين قوسه ومحيطها أو بين زاويته وأربع قوائم يحدث

قطاع هـ / دائرة نق = هـ / ٣٦٠° أو قطاع هـ = هـ / ٣٦٠° × ط نق٢

وهذا قانون أول لمساحة القطاع

لكنه للوصول الى القانون الذى يطلبه المنطوق نستعوض مساحة الدائرة بمقدارها فيحدث

قطاع هـ = هـ / ٣٦٠° × محيط نق × نق/٢

غير أن هـ/٣٦٠ × محيط نق هو مقدار طول القوس الذى زاويته هـ كما هو معلوم فيكون

قطاع هـ = قوس هـ × نق/٢

دعوى نظـــــرية

(١٩٢) مساحة القطعة تساوى حاصل ضرب ربع قطر الدائرة فى الفرق الكائن بين قوسها وبين وتر قوس ضعفه (شكل ١٧٥)

وللبرهنة على ذلك يقال من المعلوم ان القطعة ا حـ ب عبارة عن الفرق الكائن بين القطاع و ا حـ ب وبين المثلث و ا ب أعنى ان

قطعة ا حـ ب = قطاع و ا حـ ب — مثلث و ا ب

غير أن مساحة القطاع تساوي حاصل ضرب قوسه في ربع قطر الدائرة واما المثلث و ا ب فانه يمكن اعتبار قاعدته و ب وأما ارتفاعه فهو العمود النازل من نقطة ا على و ب الذي هو عبارة عن نصف وتر قوس ضعف القوس ا ح ب وبناء عليه يحدث

شـ ١٧٥

قطعة ا ح ب = قوس ا ح ب × $\frac{نق}{٢}$ − نق × $\frac{ل}{٤}$

بفرض ان ل رمز لوتر قوس ضعف القوس ا ح ب أو

قطعة ا ح ب = $\frac{نق}{٢}$ (قوس ا ح ب − $\frac{١}{٢}$ ل)

تنبيـــه - مقدار طول الوتر لا يمكن تعيينه بواسطة المسطرة والبرجل الا اذا كان أحد أضلاع شكل من الاشكال التي يمكن رسمها داخل الدائرة وفي الاحوال الاخر فانه يستعان على تعيينه بواسطة جداول اللوغاريتمات

دعوى عمليـــــة

(١٩٣) المطلوب تعيين مقدار النسبة التقريبية ط بين محيط الدائرة وقطرها

يتوصل بالقانونين محيط نق = ٢ ط نق ودائرة نق = ط نق٢ الى أربعة طرق مختلفة لتعيين مقدار ط وهي

أولا - اذا علم طول المحيط ويطلب تعيين المقدار التقريبي لنصف القطر

ثانيا - اذا علم نصف القطر ويطلب تعيين المقدار التقريبي لطول المحيط

ثالثا - اذا علم سطح الدائرة ويطلب تعيين المقدار التقريبي لنصف القطر

رابعا - اذا علم نصف القطر ويطلب تعيين المقدار التقريبي لسطح الدائرة

وسنتكلم هنا على الطريقتين الاوليين تدريجا فنقول

الطريقة الاولى المعروفة بطريقة المحيطات المتحدة في الطول

(١٩٤) اذا علم طول المحيط وكان المطلوب تعيين المقدار التقريبي لنصف القطر س يقال اذا كان طول المحيط مساويا ٢ حدث ٢ = ٢ ط س ومنه س = $\frac{١}{ط}$

واذن فيكون مقدار نصف القطر هو عكس مقدار ط

فاذا أنشئ شكل منتظم كيفما اتفق بحيث يكون محيطه مساويا ٢ وكان نق و نقَ نصفي قطري الدائرتين المرسومتين خارجه وداخله فان محيط الدائرة الذي نصف قطره نق يكون طوله

أكبر من ٢ ضرورة كما ان محيط الدائرة الذى نصف قطره ىَ أقل من ٢ وحينئذ فيكون
س محصورا بين ى و ىَ

فاذا انتقلنا الآن من هذا الشكل المنتظم الى آخر متحد معه فى الطول ومضاعف له فى عدد
الاضلاع نجد أن س محصور بين ى$_{1}$ و ىَ$_{1}$ ويمكن الاستمرار على ذلك الى غير نهاية

وحيث انه قد شوهد بنمرة (١٨٧) ان الفرق ى — ىَ يأخذ فى الصغر كلما زيد فى تضعيف
عدد أضلاع الاشكال المتحدة فى الطول ويكون نهايته الصغر وحينئذ فيمكن الوصول الى
عددين ينحصر بينهما س لا يفرقان عن بعضهما الا بمقدار يسير جدا وبذلك يتعين مقدار
$\frac{1}{\text{ط}}$ مع درجة التقريب المطلوبة

فاذا اعتبرنا الشكل المنتظم انه هو المربع الذى ضلعه $\frac{1}{2}$ تحصل ىَ = $\frac{1}{4}$ و ى = $\frac{\sqrt{2}}{4}$
ثم اذا جعلنا هذين المقدارين مبدأ للاعمال واستخرجنا على التوالى مع التعاقب الوسط المتناسب
العددى والوسط المتناسب الهندسى للعددين المذكورين كما ذكر بنمرة (١٨٧) فانا نتوصل
الى مقادير

(ىَ$_{1}$ و ى$_{1}$) و (ىَ$_{2}$ و ى$_{2}$) و (ىَ$_{3}$ و ى$_{3}$) و ... وهكذا

ومتى توصل الى مقدار ى نصفى قطرين مثل (ىَ$_{ن}$ و ى$_{ن}$) مشتركين فى الخانات العشرة
الاول مثلا فانه يمكن أخذ احدهما أو الآخر لمقدار س أو لمقدار $\frac{1}{\text{ط}}$ مقربا بأقل من واحد
من الخانة الحادية عشرة الاعشارية

ولنلاحظ الآن انه اذا كتب العددان ٠ و $\frac{1}{2}$ وأخذ الوسط المتناسب العددى بينهما ثم أخذ
الوسط المتناسب الهندسى بين العددين الاخيرين تحصل $\frac{1}{4}$ و $\frac{\sqrt{2}}{4}$
وحينئذ فيمكن ايراد هذه النظرية

نظرية — اذا كتب العددان ٠ و $\frac{1}{2}$ وأخذ بدون انقطاع مع التعاقب الوسط الحسابى
والهندسى للعددين الاخيرين فانه يتكون من ذلك سلسلة نواتج تقرب مقاديرها قربا كليا من $\frac{1}{\text{ط}}$
ويكون هذا المقدار محصورا دائما بين أى ناتجين متواليين

فى حساب $\frac{1}{ط}$ مقربا باقـــل من $\frac{1}{1000000}$

عـــدد الاضلاع	سَ	س
٤	٠٫٢٥٠٠٠٠٠	٠٫٣٥٣٥٥٣٤
٨	٠٫٣٠١٧٧٦٧	٠٫٣٢٦٦٤٠٥
١٦	٠٫٣١٤٢٠٨٦	٠٫٣٢٠٣٦٤٤
٣٢	٠٫٣١٧٢٨٦٥	٠٫٣١٨٨٢١٨
٦٤	٠٫٣١٨٠٥٤١	٠٫٣١٨٤٣٧٨
١٢٨	٠٫٣١٨٢٤٥٩	٠٫٣١٨٣٤١٨
٢٥٦	٠٫٣١٨٢٩٣٩	٠٫٣١٨٣١٧٨
٥١٢	٠٫٣١٨٣٠٥٩	٠٫٣١٨٣١١٨
١٠٢٤	٠٫٣١٨٣٠٨٩	٠٫٣١٨٣١٠٣
٢٠٤٨	٠٫٣١٨٣٠٩٦	٠٫٣١٨٣٠٩٩
٤٠٩٦	٠٫٣١٨٣٠٩٨	٠٫٣١٨٣٠٩٨

تنبيـــه — يجب لاجراء هذا الحساب مع السرعة والضبط

أولا — استعمال عمليات الضرب المختصرة

ثانيا — أن يتذكر عند استخراج الجذر التربيعى لاى عدد الاعتماد على أرقام أعشارية من ناتج الجذر بقدر ما فى العدد المفروض من الارقام الحقيقية

ثالثا — أن يتذكر أن الفرق بين المتوسط الحسابى والمتوسط الهندسى أقل من الفرق بين العددين مقسوما على ثمانية أمثال الاصغر وبناء عليه فيمكن استعواض المتوسط الهندسى بالمتوسط الحسابى عندما يشترك س و سَ فى ثلاثة أرقام أعشارية

الطريقة الثانية المعروفة بطريقة المحيطات

(١٩٥) اذا علم نصف القطر وأريد ايجاد مقدار طول محيط الدائرة التقريبى

اذا فرض أن مقـدار نصف القطر هو $\frac{1}{2}$ يكون طول المحيط مساويا ط ويكون عكس طوله هو $\frac{1}{ط}$ فاذا انشئ فى هذه الحالة مربع داخل الدائرة وآخر خارجها تحصل

$$ع = ٤ \ ، \ عَ = ٢\sqrt{٢} \quad \text{ويكون} \quad \frac{1}{ع} = \frac{1}{٤} \ ، \ \frac{1}{عَ} = \frac{\sqrt{٢}}{٤}$$

وحيث ان المحيط محصور بين ح و حَ فيكون $\frac{1}{\text{ط}}$ محصورا بين $\frac{1}{\text{ح}}$ و $\frac{1}{\text{حَ}}$

فاذا ضوعف عدد الاضلاع شيأ فشيأ فانه يتوصل الى أشكال عدد أضلاعها ٨ و ١٦ و ٣٢ والخ وبمقتضى ما تقرر بنمرة (١٨٦) يتوصل الى مقادير الكميات $\left(\frac{1}{\text{ح}} ، \frac{1}{\text{حَ}}\right)$ و $\left(\frac{1}{\text{ح}_1} ، \frac{1}{\text{حَ}_1}\right)$ و $\left(\frac{1}{\text{ح}_2} ، \frac{1}{\text{حَ}_2}\right)$ وهكذا التى تقرب تدريجا من الكمية $\frac{1}{\text{ط}}$.

ونشاهد أن الاعمال الحسابية التى توصلنا اليها بهذه الطريقة مطابقة لاعمال الطريقة الاولى

تنبيه — لما كان مقدار ط غير منطق قد اعتنى بعض الحسابيين الصابرين فى تعيين مقدار عظيم جدا من أرقامه الاعشارية وقد علم منه للآن ٥٠٠ رقم وقد علم أن

ط = ٣٫١٤١٥٩ ٢٦٥٣٥ ٨٩٧٩٥ ٢٣٨٤٦ .... و

$\frac{1}{\text{ط}}$ = ٠٫٣١٨٣٠ ٩٨٨٦١ ....

وقد بحث (ارشميدس) أقدم المؤلفين فى النسبة الكائنة بين المحيط وقطره فوجد أنها محصورة بين

$٣\frac{١٠}{٧١}$ و $٣\frac{١٠}{٧٠} = ٣\frac{١}{٧} = \frac{٢٢}{٧}$

والمقدار الاخير مقبول لبساطته ويتحصل منه رقمان أعشاريان حقيقيان

وأما (ادريان متيوس) فقد وجد لهذه النسبة المقدار $\frac{٣٥٥}{١١٣}$ الذى يتحصل منه سبعة أرقام أعشارية حقيقية

ومما يجعل هذا المقدار مفيدا خاصيته الموجبة لحفظه عقلا حيث انك لو كتبت على التوالى كل رقم من الارقام الثلاثة الاول الفردية وهى ٥ و ٣ و ١ مرتين أحدهما بجانب الآخر بان تحصل ١١٣٣٥٥ فالارقام الثلاثة الاول من جهة الشمال تدل على القطر والثلاثة الاخر تدل على المحيط وبتحويله الى كسر اعشارى يتحصل منه ٣٫١٤١٥٩٢٩

غير أن مقدار نسبة أرشميدس كاف غالبا فى الاعمال

نتيجة — مسئلة تربيع الدائرة يمكن أن يعبر عنها كما يأتى

المطلوب رسم مربع يكافئ دائرة معلومة بواسطة المسطرة والبرجل

فيشاهد على مقتضى ما تقرر فى النظريات المتقدمة أن ضلع المربع المجهول يكون وسطا متناسبا بين طول محيط الدائرة وربع قطرها وكان يمكن حل هذه المسئلة لو تيسر بواسطة المسطرة والبرجل رسم مستقيم بطول محيط الدائرة غير أن معلومية مقدار ط بدرجة التقريب الكافية تسمح بتعديل طول المحيط مع التقريب لكنه لا يعلم الى الآن طريقة عملية لذلك ولم يقم دليل باستحالة اجراء مثل هذه الطريقة

وعدم امكان ايجاد المقدار الحقيقى للكمية ط بعدد كسرى ليس هو السبب فى عدم الامكان المطلق فى تعديل محيط الدائرة حيث انه يمكن رسم المقادير ا$\sqrt{٢}$ و ا$\sqrt{٣}$ و ا$\sqrt{٥}$ و ... الخ بواسطة المسطرة والبرجل مع أن $\sqrt{٢}$ و $\sqrt{٣}$ و $\sqrt{٥}$ و ... كميات غير منطقة

الفصل الرابع

فى الدعاوى العملية المتعلقة بالمضلعات المنتظمة

دعوى عملية

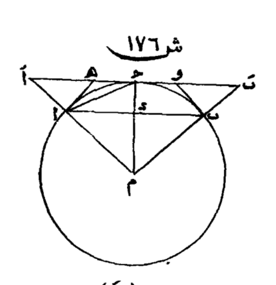
(١٩٦) اذا علم أحد أضلاع شكل منتظم مرسوم داخل دائرة والمطلوب ايجاد مقدار ضلع الشكل المنتظم المشابه للاول المرسوم خارج الدائرة (شكل ١٧٦) وبالعكس

أولا — اذا كان ا = ا ب معلوما والمطلوب

ايجاد اَ = اَ بَ يقال

يؤخذ من المثلثين م ا ب و م اَ بَ المتشابهين أن

$$\frac{ا}{اَ} = \frac{م ء}{م حـ} = \frac{\sqrt{س^٢ - \frac{ا^٢}{٤}}}{س}$$



وحينئذ يكون

$$اَ = \frac{ا س}{\sqrt{٤ - (\frac{ا}{س})^٢}}$$

ثانيا — اذا كان المعلوم اَ = اَ بَ

والمطلوب ايجاده هو ا = ا ب يقال

يؤخذ من نفس المثلثين المتشابهين أن

$$\frac{ا}{اَ} = \frac{م ا}{م اَ} = \frac{س}{\sqrt{س + \frac{اَ^٢}{٤}}} \quad \text{أو} \quad ا = \frac{س \times ٢ (\frac{اَ}{س})}{\sqrt{٤ + (\frac{اَ}{٤})^٢}}$$

نتيجة ١ — اذا أريد ايجاد ضلع المثلث المتساوى الاضلاع المرسوم خارج الدائرة يقال

من المعلوم أن ا = س $\sqrt{٣}$ وحينئذ يكون المقدار المطلوب مبينا بالقانون

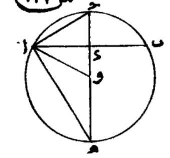
$$\text{أ}' = \text{س}\,\frac{٢\sqrt{٣}}{\sqrt{٤-٣}} = ٢\,\text{س}\sqrt{٣}$$

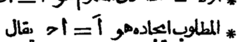
أعنى أن مقدار ضلع المثلث المتساوى الاضلاع المرسوم خارج الدائرة هو ضعف مقدار الضلع نظيره من المثلث المتساوى الاضلاع المرسوم داخلها وهذا أمر يظهر أيضا من الرسم اذا تذكرنا أن العمود النازل من المركز على ضلع المثلث المتساوى الاضلاع المرسوم داخل الدائرة مساو ربع قطرها

نتيجة ٢ ـ اذا أريد ايجاد ضلع المسدس المنتظم المرسوم خارج الدائرة يقال ان ا فى هذه الحالة مساو س ويحدث $\text{أ}' = \frac{٢}{٣}\,\text{س}\sqrt{٣}$ ويمكن ايراد أمثلة كثيرة تطبيقا على القانونين المتقدمين

دعوى عمليه

(١٩٧) اذا علم ضلع من شكل منتظم مرسوم داخل دائرة والمطلوب ايجاد ضلع الشكل المنتظم المرسوم داخلها أيضا والمضاعف للاول فى عدد الاضلاع وبالعكس (شكل ١٧٧)





أولا ـ اذا كان المعلوم هو ا = اب , س = او وأن المطلوب ايجاده هو أ' = اح يقال

نمد القطر حوهـ ونصل اهـ فيتكون من ذلك المثلث احهـ القائم الزاوية فيه اح وسط متناسب بين القطر حهـ والسهم حد المجاور له أعنى أن

$$\text{أ}'^2 = ٢\,\text{س}\cdot\text{حد} = ٢\,\text{س}(\text{س} - \text{دو}) = ٢\,\text{س}\left(\text{س} - \sqrt{\text{س}^2 - \frac{\text{أ}^2}{٤}}\right)$$

ومع الاختصار يحدث

$$\text{أ}' = \text{س}\sqrt{٢ - \sqrt{٤ - \left(\frac{\text{أ}}{\text{س}}\right)^2}}$$

ثانيا ـ اذا كان المعلوم هو أ' = اح , س = او والمطلوب ايجاده هو ا = اب يقال

اذا طبقنا نظرية نمرة (١٤٥) على الشكل الرباعى اهـبح يحدث

$$٢\,\text{س}\,\text{ا} = ٢\,\text{أ}' \times \text{اهـ} = ٢\,\text{أ}'\sqrt{٤\,\text{س}^2 - \text{أ}'^2} \quad \text{أو} \quad \text{س}\,\frac{\text{أ}'}{\text{س}}\sqrt{٤ - \left(\frac{\text{أ}'}{\text{س}}\right)^2}$$

ومع ذلك فانه كان يمكن استنتاج هذا القانون من السابق

* نتيجة ١ — اذا أريد ايجاد مقادير أضلاع الاشكال المنتظمة التى عدد أضلاعها هى على
* التعاقب ٨ و ١٦ و ٣٢ و ... الخ يقال
* نضع أولا فى القانون الاول $\text{أ} = \text{س}\sqrt{٢}$ فيحدث $\text{أَ} = \text{س}\sqrt{٢-\sqrt{٣}} = \text{أ}_{٨}$ وهو
* مقدار ضلع المثمن المنتظم ثم اذا وضعنا هذا المقدار بدل أ فى القانون المذكور يحدث

$$\text{أ}_{١٦} = \text{س}\sqrt{٢-\sqrt{٢+\sqrt{٢}}}$$

* ومع الاستمرار على ذلك يتوصل الى

$$\text{أ}_{٣٢} = \text{س}\sqrt{٢-\sqrt{٢+\sqrt{٢+\sqrt{٢}}}} \quad \text{وهكذا}$$

* وعلى العموم فان

$$\text{أ}_{٢^{ن}} = \text{س}\sqrt{٢-\sqrt{٢+\sqrt{٢+\sqrt{+\sqrt{٢+\sqrt{٢+....}}}}}}$$

* بحيث يكون عدد علامات الجذر مساويا ن — ١ ويكون طول محيط هذا الشكل مساويا الى

$$\text{ح}_{٢^{ن}} = \text{س}\,٢^{ن}\sqrt{٢-\sqrt{٢+\sqrt{٢}}}...$$

* وبقسمة الطرفين على ٢ س فانا نتحصل على مقدار ط وهو

$$٢^{ن-١}\sqrt{٢-\sqrt{٢+\sqrt{٢+\sqrt{٢+\sqrt{٢+...}}}}}$$

* وعدد علامات الجذر الداخلة فى هذا المقدار هو ن — ١ واذن فيمكن ان يكتب

$$\text{ط} = ٢^{ن}\sqrt{٢-\sqrt{٢+\sqrt{٢+\sqrt{٢+\sqrt{٢+...}}}}}$$

* ويكون عدد علامات الجذر مساويا ن
* نتيجة ٢ — وبمثل ما ذكر يتوصل الى مقادير أضلاع الاشكال المنتظمة التى عدد
* أضلاعها ١٢ و ٢٤ و ٤٨ و ٩٦ وهكذا

دعوى عمليـــــة

* (١٩٨) اذا علم نصف قطر الدائرة وضلع الشكل المنتظم المرسوم خارجها والمطلوب ايجاد
* مقدار ضلع الشكل المنتظم المرسوم خارجها المضاعف للاول فى عدد الاضلاع وبالعكس
* (شكل ١٧٥)

* أولا — اذا كان المعلوم هو أَبَ = ا , وحـ = س وان المطلوب ايجاده هو
* هـ هَ = اَ يقال
* حيث ان المستقيم وهـ منصف للزاوية ا ؤ حـ يحدث

* $\frac{هـ حـ}{و حـ}=\frac{هـ ا'}{و ا'}=\frac{هـ حـ + هـ ا'}{و حـ + و ا'}=\frac{هـ ا'}{ا'}$ أو $\frac{\frac{1}{2}ا}{س}=\frac{\frac{1}{2}ا}{س+\sqrt{س^2+\frac{ا^2}{4}}}$

* ومع الاختصار يحدث

* $ا'=س\frac{2\left(\frac{ا}{س}\right)}{2+\sqrt{4+\left(\frac{ا}{س}\right)^2}}$

* ويمكن تغيير هذا المقدار بآخر يكون مقامه خاليا من علامة الجذر وهو

* $ا'=2س\frac{\sqrt{4+\left(\frac{ا}{س}\right)^2}-2}{\left(\frac{ا}{س}\right)}$

* ثانيا — اذا كان المعلوم هو اَ , س والمطلوب ايجاده هو ا يقال
* يتوصل من القوانين المتقدمة التى حلت بالنسبة الى ا أن

* $ا=س\frac{8\left(\frac{ا'}{س}\right)}{4-\left(\frac{ا'}{س}\right)^2}$

* نتيجة — يمكن أن يستنتج من القانون الاول تمرينا على ما تقدم مقادير أضلاع الاشكال
* المنتظمة المرسومة خارج الدائرة التى عدد أضلاعها هى

* ٨ و ١٦ و ٣٢ و ٠٠٠ الخ و ٦ و ١٢ و ٢٤ و ٤٨ و ٠٠٠ الخ

دعوى عمليــــة

* (١٩٩) اذا علم سطحا شكلين منتظمين متشابهين احدهما مرسوم خارج الدائرة والثانى
* داخلها والمطلوب ايجاد سطحى الشكلين المنتظمين المضاعفين للاولين فى عدد الاضلاع
* والمرسومين خارج الدائرة وداخلها (شكل ١٧٦)
* ليكن ا ب ضلع الشكل المنتظم المرسوم داخل الدائرة و اَبَ الضلع المناظر له من
* الشكل المنتظم المرسوم خارج الدائرة عدد أضلاع كل واحد منهما ن فيكون ا حـ هو
* ضلع الشكل المضاعف الداخل فاذا كان كل من ا هـ و ب و مماسين لمحيط الدائرة

يكون هـ و ضلع الشكل المضاعف الخارج ثم رمز بالحرفين ا , اَ لمساحتي الشكلين
المعلومين و إ و إَ لمساحتي الشكلين المطلوبين يحدث

$$\text{اَ} = \text{٢ق} \times \text{م اَ حـ} \quad , \quad \text{ا} = \text{٢ق} \times \text{م ا ى} \quad ,$$

$$\text{إَ} = \text{٤ق} \times \text{م هـ حـ} \quad , \quad \text{إ} = \text{٢ق} \times \text{م ا حـ}$$

اذا تقرر هذا يقال

أولا — يؤخذ من المثلثات

$$\text{م ى ا , م حـ ا , م حـ اَ ان} \quad \frac{\text{م ا ى}}{\text{م ا حـ}} = \frac{\text{م ى}}{\text{م حـ}} = \frac{\text{م ا}}{\text{م اَ}} = \frac{\text{م ا حـ}}{\text{م اَ حـ}}$$

وبناء عليه يكون

$$\frac{\text{٢ق} \times \text{م ا ى}}{\text{٢ق} \times \text{م ا حـ}} = \frac{\text{٢ق} \times \text{م ا حـ}}{\text{٢ق} \times \text{م اَ حـ}} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{ا}}{\text{إ}} = \frac{\text{إ}}{\text{اَ}} \quad \text{أو} \quad \text{إ} = \sqrt{\text{ا اَ}}$$

ثانيا — يحدث أيضا ان

$$\frac{\text{م هـ حـ}}{\text{م هـ اَ}} = \frac{\text{هـ حـ}}{\text{هـ اَ}} = \frac{\text{م حـ}}{\text{م اَ}} = \frac{\text{م ى}}{\text{م حـ}} = \frac{\text{م ا ى}}{\text{م ا حـ}}$$

وبتغيير الوسطين يحدث

$$\frac{\text{م هـ حـ}}{\text{م ا ى}} = \frac{\text{م هـ اَ}}{\text{م ا حـ}} = \frac{\text{م اَ حـ}}{\text{م ا ى} + \text{م ا حـ}}$$

وحينئذ يكون أيضا

$$\frac{\text{٤ق} \times \text{م هـ حـ}}{\text{٢ق} \times \text{م ا ى}} = \frac{\text{٤ق} \times \text{م اَ حـ}}{\text{٢ق} \times \text{م ا ى} + \text{٢ق} \times \text{م ا حـ}} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{إَ}}{\text{ا}} = \frac{\text{٢اَ}}{\text{ا} + \text{إ}}$$

وبناء عليه يكون

$$\text{إَ} = \frac{\text{٢ ا اَ}}{\text{ا} + \text{إ}}$$

تنبيه — اذا أخذ عكس مقادير الكميات ا , اَ , إ , إَ فانه يتوصل الى قوانين
يقرب مقاديرها من المقادير السابق ايجادها (بنمرة ١٨٧)

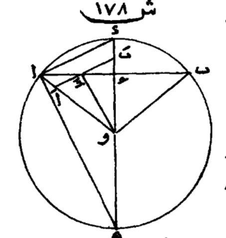
$$\frac{1}{\text{إَ}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\text{ا}} + \frac{1}{\text{إ}}\right) \quad , \quad \frac{1}{\text{إ}} = \sqrt{\frac{1}{\text{ا}} \times \frac{1}{\text{اَ}}}$$

نتيجة — هذه القوانين يتوصل منها الى ايجاد المقدار التقريبي للنسبة ط بطريقة جديدة
فنفرض ان س = ١ فيكون سطح الدائرة مساويا ط ولتعيينه يقال

* نرسم مربعا داخل الدائرة فيكون سطحه $ا = ٢$ ثم نرسم مربعا آخر خارجها فيكون مسطحه
* $\bar{ا} = ٤$ ويكون مقدار ط محصورا بين هذين المقدارين فاذا ضعفنا عدد الاضلاع فانا
* نتوصل بواسطة القوانين المتقدمة الى مقادير
* $(\frac{ا}{١} , \frac{\bar{ا}}{١})$ و $(\frac{ا}{٢} , \frac{\bar{ا}}{٢})$ و $(\frac{ا}{٣} , \frac{\bar{ا}}{٣})$ وهكذا الى $(\frac{ا}{ن} , \frac{\bar{ا}}{ن})$
* ولايزال مقدار ط محصورا بين $\frac{ا}{ن}$ و $\frac{\bar{ا}}{ن}$
* وحينئذ فمتى اتحد مقدارا مسطحى هذين الشكلين فى بعض الارقام الاعشارية فانها تجعل
* لمقدار ط
* وبحساب عكس هذه السطوح المختلفة فان مقاديرها تقرب من $\frac{١}{ط}$ بواسطة توالى اجراء
* اعمال مشابهة للاعمال التى أجريت فى طريقة المحيطات

دعوى عمليه

* (٢٠٠) اذا علم نصفا قطرى الدائرتين المرسومتين خارج وداخل شكل منتظم والمطلوب
* حساب نصفى قطرى الدائرتين المرسومتين خارج
* وداخل شكل آخر منتظم مكافئ للاول ومضاعف له
* فى عدد الاضلاع (شكل ١٧٨) يقال
* ليكن ا ب ضلع المضلع المنتظم المعلوم فيكون
* $و ا = و ب = س$, $و ح = س َ$
* أولا — بمد القطر د ح و هـ فتكون زاوية ا و د
* احدى زوايا المضلع المكافئ وليكن $ا \bar{ب}$ ضلعه
* بحيث يكون



* $و \bar{ا} = و \bar{ب} = س_١$, $و \bar{ح} = س_١َ$
* فمن حيث ان
* $٢ ن \times و \bar{ا} \bar{ب} = ٢ \times و ا ح$ لزم أن يكون $و \bar{ا} \times و \bar{ب} = و ا \times و ح$
* لان نسبة المثلثين اللذين اشتركا فى زاوية هى كالنسبة بين مستطيل الضلعين المحيطين بزاوية
* المثلث الاول الى مستطيل الضلعين المحيطين بزاوية المثلث الثانى ومن ذلك يستخرج أن
* $س_١َ = س س َ$, $س_١ = \sqrt{س س َ}$
* ثانيا — اذا قارنا المثلثين ا ح د , و $\bar{ح} \bar{ب}$ المتشابهين ببعضهما يحدث

* $\frac{وحَ}{وب} = \frac{اح}{اء}$ أو $\frac{س_1'}{س_1} = \frac{\sqrt{س^2 - س'^2}}{\sqrt{2س(س - س')}} = \sqrt{\frac{س + س'}{2س}}$

* ومن ذلك يستنتج ان

* $س_1' = \sqrt{\frac{س'(س + س')}{2}}$

* نتيجة — يتيسر الحصول بواسطة هذين القانونين على المقدار التقريبي للكمية ط بطريقة
* جديدة فاذا افرض ان سطح الدائرة مساو للوحدة وجعل س رمزا لنصف قطرها حدث
* $س^2 = \frac{1}{ط}$
* ولتعيين مقدار س يرسم مربع يكون مسطحه مساويا للوحدة أعني يكون ضلعه الوحدة
* أيضا فيحدث

* $س = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $س' = \frac{1}{2}$

* وبتضعيف عدد الاضلاع الى غير نهاية بدون تغيير مقادير السطوح فاننا نتوصل على التوالى
* الى مقادير الكميات الآتية

* $(س_1 ، س_1')$ و $(س_2 ، س_2')$ و $(س_3 ، س_3')$ و ..... $(س_ن ، س_ن')$

* ومن المعلوم ان الدائرة المتحدة فى المسطح مع تلك السطوح يكون نصف قطرها محصورا بين
* $س_ن$ و $س_ن'$ وبناء عليه يكون $\frac{1}{\sqrt{ط}}$ محصورا بين $س_ن$ و $س_ن'$ واذن يمكن الحصول
* على مقدار هذه الكمية مع درجة التقريب الكافية

---

* دعوى عمليـــــة

* فى تربيع الدائرة (شكل ١٧٩)
* قد ذكرنا فيما تقدم انه لم يعلم الى الآن طريقة عمليـة حقيقية لتربيع
* الدائرة بواسطة المسطرة والبرجل أى ايجاد طول ضلع المربع المكافئ
* لها بطرق رسمية غير أننا نذكر هنا طريقتين تقريبيتين لذلك فنقول
* الاولى — (شكل ١٧٩) ليكن اب قطر الدائرة وليكن البعد
* وح مساويا $\frac{1}{6}$ نصف قطر الدائرة فيمد من نقطه ا المماس اء
* ثم نجعل نقطة ح مركزا وببعد مساو ضعف القطر اب نرسم

ش ١٧٩
ب و ا
هـ
ء

* قوسا من محيط دائرة يقطع المماس فى نقطة ء ثم نصل ب ء فيقطع محيط الدائرة فى نقطة
* هـ . فاذا وصل ا هـ يكون هو المقدار التقريبى لضلع المربع المكافئ للدائرة وهذه الطريقة
* المنسوبة للمعلم (سونيت) هى مفيدة فى الاعمال فبحساب مقدار ضلع المربع المكافئ للدائرة
* التى نصف قطرها الوحدة علم انه يساوى ١٫٧٧٢٤٥٣٨ ومقدار الضلع المذكور من طريقة
* (سونيت) هو ١٫٧٧٢٤٥٠٢

* الثانية — (شكل ١٨٠) يرسم قطران متعامدان
* داخل الدائرة ويقسم أحد أنصاف الاقطار و م مثلا
* الى أربعة اجزاء متساوية ثم نضم أحد هذه الاجزاء الى
* نصف القطر و م بحيث يكون و ا = $\frac{٥}{٤}$ و م
ثم نتمم رسم المربع الذى يكون فيه و ا نصف أحد قطريه
فيكون مكافئا لسطح الدائرة أما مقدار ضلع المربع
المتحصل من هذه الطريقة فهو ١٫٧٧٦٨٠٠٠٠ بدل المقدار ١٫٧٧٢٠٠٠٠ وهذا التقريب
كاف احيانا فى الاعمال

الفصل الخامس

تمرينات

١ — المطلوب ايجاد مساحة المربع المرسوم داخل دائرة نصف قطرها ٥ أمتار وكذا المرسوم خارجها

٢ — اذا فرض مربعان ضلع أحدهما يساوى قطر الآخر والمطلوب معرفة النسبة بينهما

٣ — المطلوب ايجاد مساحة المربع الذى علم أن الفرق بين قطره وضلعه ٦ امتار

٤ — ما مقدار نصف قطر الدائرة المرسومة داخل مربع يكون الفرق بين قطره وضلعه مساويا ٦ أمتار

٥ — اذا كانت مساحة المثلث المتساوى الاضلاع تساوى ٤٫٥٠ متر امربعا والمطلوب ايجاد مساحة المربع المرسوم داخل الدائرة المرسومة على المثلث

٦ — اذا كانت مساحة التاج المحصور بين محيطى دائرتين متحدتى المركز مساوية ٢٥٫١٣٢٨ مترا مربعا وكان نصف قطر محيط الدائرة الكبرى يزيد مترين عن نصف قطر محيط الدائرة الصغرى والمطلوب معرفة نصفى قطرى محيطى الدائرتين المذكورتين

٧ ـ اذا اتحد محيطا دائرتين فى المركز فانه يطلب البرهنة على أن وتر المحيط الاكبر المماس للمحيط الاصغر يكون قطر الدائرة مساحتها تساوى مساحة التاج

٨ ـ اذا كانت مساحة القطاع تساوى ٢٠٫٢٦٥٠ مترامربعا وكان مقدار درج قوسه المعتبر قاعدة له مساويا ١٥َ ٦٥° والمطلوب معرفة طول قوسه

٩ ـ المطلوب حساب مساحة القطعة التى مقدار درج قوسها ٤٥° من دائرة نصف قطرها ٣ متر

١٠ ـ اذا دل عدد ٣ أمتار على نصف قطر دائرة فما مقدار نصف قطر الدائرة التى مساحتها أربعة أمثال الاولى

١١ ـ المطلوب تعيين نصف قطر الدائرة المكافئة لعدة دوائر معلومة أو للفرق بين دائرتين معلومتين

١٢ ـ المطلوب تقسيم دائرة الى جزءين متكافئين أو عدة أجزاء متكافئة بواسطة دائرة أو دوائر أخرى متحدة مع الاولى فى المركز

١٣ ـ المطلوب تقسيم دائرة الى جملة أجزاء مناسبة لاعداد معلومة بواسطة دوائر أخرى متحدة معها فى المركز

١٤ ـ المطلوب معرفة عدد التراييع الرخام التى شكلها مسدس منتظم طول ضلعه ٠٫١٢ متر لفرشها فى محل مستطيل الشكل طوله ٥ أمتار وعرضه ٤ أمتار

١٥ ـ ما مساحة القطعة التى قوسها ٦٠° من دائرة نصف قطرها ٣ متر

١٦ ـ المطلوب ايجاد النسبة الكائنة بين المسدسين المنتظمين المرسوم أحدهما خارج الدائرة والثانى داخلها

١٧ ـ اذا علم ضلع المثلث المرسوم داخل الدائرة والمطلوب حساب سطح الدائرة المرسومة عليه

١٨ ـ المطلوب ايجاد النسبة بين سطح الدائرة والمثلث المتساوى الاضلاع المرسوم داخلها

* ١٩ ـ اذا كان مجموع مساحتى الدائرة والمثلث المتساوى الاضلاع المرسوم داخلها مساويا ٣ أمتار مربعة والمطلوب معرفة مساحة كل واحد منهما

* ٢٠ ـ المطلوب ايجاد مساحة المثمن المنتظم المرسوم داخل دائرة نصف قطرها ٣٫٢٠ متر

* ٢١ ـ اذا كانت مساحة المثمن المنتظم تساوى ٢٠ مترا مربعا والمطلوب تعيين نصفى قطرى الدائرتين المرسومتين داخله وخارجه

(تم الجزء الثانى من كتاب التحفة البهية ويليه الجزء الثالث)

فهرســــة الجــــزء الثــانى من التحفة البهيه

صحيفة

(تمت)

الجـــــزء الثـالث

من كتاب التحفة البهيـــة فى الاصول الهندســية

وهو مقرر الدروس الهندسية لتلامذة السنة الثالثـة بمدرسة التجهيزية

تأليف

حضرة احمــد بك نظيم

ناظـــر مدرســة دار العــلوم وقــلم الترجـــه

(تنبيـــــــه)

وان كنا ذكرنا فى خطبة الكتاب فى الجزء الاول ان الزيادات تميز عن الاصل بكتابتها بحروف دقيقة غير أن مقتضيات الاحوال أوجبت تميزها بوضع نجوم قبلها فى أوائل السطور فليتنبه

(الطبعة الاولى)

بالمطبعة الكبرى الاميرية ببولاق مصر المحميـــة

ســنة ١٣٠٥ هجرية



بسم الله الرحمن الرحيم

الجزء الثالث

في المستوى والزوايا المجسمة والكرة وكثيرات السطوح

الباب الاول

في المستوى والزوايا المجسمة

الفصل الاول

في المستوى وتعيينه

(٢٠٢) المستوى هو كما تقدم (٩) سطح غير محدود ينطبق عليه المستقيم كمال الانطباق في جميع جهاته

(٢٠٣) ويتعين وضعه

أولا — بكل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة لانه تقدم في (نمرة ١١) ان مثل هذه النقط الثلاث لايمكن أن يمر بها الا مستو واحد

فعلى هذا كل مستقيمين متقاطعين يتعين بهما وضع مستو وكذا يتعين بكل مستقيم ونقطة خارجة عنه وان أى جزء من مستو يمكن ان ينطبق على أى جزء آخر منه أو من مستو آخر

ثانيا — بكل مستقيمين متوازيين لانه يؤخذ من تعريفهما وجودهما فى مستو واحد وغير ذلك حيث ان هذا المستوى يشتمل طبعا على احدهما وعلى نقطة من الثانى فلا يمكن أن يمر بهما غيره

ومما ذكر نستنتج النتائج الآتية

الاولى — كل مستقيمين غير موجودين فى مستو واحد أى لو مررنا مستويا باحدهما وكان قاطعا للثانى فلا يقال لهما متوازيان ولا متقاطعان ومن هنا يعلم ان من أى نقطة فراغية لا يمكن تمرير الا مستقيم واحد يوازى آخر معلوما

الثانية — لا يمكن أن يكون تقاطع أى مستويين الا مستقيما لانه ان لم يكن كذلك لوجد بالاقل على خط تقاطعهما ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة واذن فيتحدان معا ويصيران مستويا واحدا وهو مغاير للغرض

الثالثة — يمكن أن يتصور تولد المستوى اما من حركة مستقيم مار بنقطة معلومة ومتكئ على مستقيم معلوم واما من حركة مستقيم بالتوازى لنفسه ومتكئ على آخر معلوم

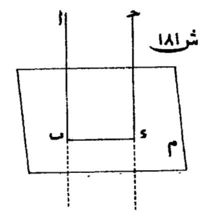
الفصل الثانى

فى المستقيمات والمستويات المتوازية

(٢٠٤) المستقيم والمستوى المتوازيان أو المستويان المتوازيان هما اللذان مهما امتدا لا يلتقيان أصلا

دعوى نظرية

(٢٠٥) المستوى القاطع لاحد مستقيمين متوازيين يكون قاطعا للثانى والموازى لاحدهما يكون موازيا للثانى (شكل ١٨١)



أولا — اذا كان المستوى م قاطعا لاحد المستقيمين المتوازيين ا ب مثلا فى نقطة ب يكون قاطعا للثانى ح ى وللوصول الى ذلك يكفى البرهنة على ان المستوى م لا يحتوى على المستقيم ح ى ولا يوازيه

فاذا احتوى المستوى م المستقيم ح ى فمن حيث انه يحتوى زيادة على ذلك على نقطة ب من المستقيم ا ب

فيكون مشتملا عليهما معا (٢٠٣ ثانيا) وبذلك يكون هو نفس مستوى المستقيمين المتوازيين وهو مغاير للغرض واذن فلا يكون المستوى م مشتملا على المستقيم حـ ء

ثم يقال حيث ان مستوى المستقيمين المتوازيين يجب أن يقطع المستوى م فى مستقيم (٢٠٣ نتيجة) يمر بنقطة ب وانه لو امتد هذا المستقيم الموجود فى كلا المستويين فانه يقابل المستقيم حـ ء فى نقطة ء احدى نقط المستوى م فاذن لا يكون المستوى م موازيا للمستقيم حـ ء بل قاطعا له

ثانيا — كل مستو مثل م يكون موازيا اب مثلا فانه يكون موازيا للثانى حـ ء لانه ان لم يكن كذلك لكان قاطعا له واذن فيقطع المستقيم اب (أولا) وهو مغاير للغرض

نتيجة ١ — (شكل ١٨٢) اذا امتد من نقطة حـ احدى نقط المستوى م الموازى للمستقيم اب المستقيم حـ ء موازيا للمستقيم اب فيكون موجودا بتمامه فى المستوى م لانه ان لم يكن كذلك لقطع المستوى م المستقيم اب (أولا) وهو محال

شـ ١٨٢

نتيجة ٢ — اذا وازى المستويان م و ن المستقيم اب (شكل ١٨٣) فان خط تقاطعهما هـ و يكون موازيا اب لانه لو مد من نقطة هـ احدى نقط خط التقاطع مستقيم يوازى اب فان هذا المستقيم يجب أن يكون موجودا فى كلا المستويين م و ن كما ذكر بالنتيجة السابقة واذن فيكون هو خط تقاطعهما

شـ ١٨٣

نتيجة ٣ — اذا كان المستقيم حـ ء موازيا للمستوى ن ومر بنا به مستويا آخر م قاطعا للمستوى ن فان خط تقاطعهما يكون موازيا للمستقيم حـ ء (شكل ١٨٣)

لان المستقيم المار بنقطة هـ احدى نقط خط تقاطع المستويين وموازيا للمستقيم حـ ء يجب أولا ان يكون موجودا فى المستوى ن (نتيجة ١) وثانيا يجب ان يكون فى المستوى م لانه يحتوى على أحد المستقيمين المتوازيين وعلى نقطة من الثانى

نتيجة ٤ — (شكل ١٨٣) المستويان م و ن المساران بالمستقيمين حـ ء و ع ط المتوازيين يتقاطعان فى مستقيم هـ و موازلكل واحد من المستقيمين المذكورين

لان المستقيم المار بنقطة هـ احدى نقط خط تقاطع المستويين بالتوازى لكل واحد من المستقيمين حـ ء و ح ط يجب أن يكون موجودا فى كلا المستويين واذن يكون هو خط تقاطعهما

نتيجة ٥ ـ (شكل ١٨٣) كل مستقيم مثل أ ب يوازى اخر حـ ء موجودا بتمامه فى مستوى م يكون موازيا لهذا المستوى

لانه اذا قطع المستوى م المستقيم أ ب فانه يقطع الموازى له حـ ء ولا يكون اذن موجودا بتمامه فى المستوى وهو مغاير للغرض

دعوى نظـــــرية

(٢٠٦) المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث متوازيان (شكل ١٨٤)

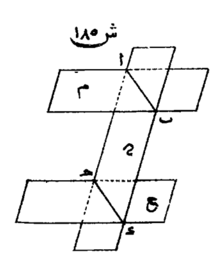
لنفرض انّ المستقيمين أ ب و حـ ء موازيان للمستقيم هـ و

أولا ـ لايمكن أن يتقاطع المستقيمان أ ب و حـ ء لانه لوحصل ذلك لامكن من نقطة فراغية مدّ مستقيمين موازيين لثالث وهو محال (٢٠٣ نتيجة ١)

ثانيا ـ أنّ المستقيمين المذكورين موجودان فى مستو واحد لانه اذا قطع المستوى ع مثلا المار بالمستقيم أ ب وبنقطة ء المستقيم حـ ء فانه يقطع ضرورة الموازى له هـ و واذن فيقطع أيضا المستقيم أ ب الموازى هـ و وبناء عليه فلا يكون مشتملا عليه وهو مغاير للغرض

دعوى نظـــــرية

(٢٠٧) خطا تقاطع مستو بمستويين متوازيين مستقيمان متوازيان (شكل ١٨٥)



ليكن المستوى ن قاطعا للمستويين المتوازيين م و ع فالمستقيمان أ ب و حـ ء الموجودان فى المستوى ن لايمكن أن يتلاقيا لوجودهما أيضا فى مستويين متوازيين واذن فهما متوازيان

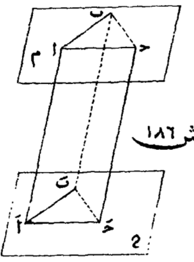
نتيجة ـ المستقيمات المتوازية المحصورة بين مستويات متوازية هى متساوية

فالمستقيمان ا ح و ب ى المتوازيان المحصوران بين المستويين م و ع المتوازيين متساويان لانا لو مررنا بهما المستوى ه فانه يقطع المستويين المتوازيين م و ع فى المستقيمين المتوازيين ا ب , ح ى واذن فيكون الشكل ا ب ح ى متوازى أضلاع ويكون فيه ا ح = ب ى وهو المطلوب

دعوى نظـــــرية

(٢٠٨) كل نقطة مفروضة يمكن أن يمر بها مستو واحد مواز لمستو معلوم لا اثنان (شكل ١٨٦)

لتكن ا النقطة المفروضة خارج المستوى ه



أولا — يمد من نقطة ا مستقيما ا ب , ا ح موازيان بالتناظر للمستقيمين اَ تَ , اَ حَ الكائنين فى المستوى المعلوم فيكونان موازيين لهذا المستوى (٢٠٥ نتيجة ٥) ويكون مستويهما ا ب ح موازيا للمستوى اَ تَ حَ لانه ان لم يكن كذلك لقابله فى مستقيم يوازى كل واحد من المستقيمين المتقاطعين ا ب , ا ح (٢٠٥ نتيجة ٤) وهو محال

ثانيا — لو فرض تمرير مستو آخر من نقطة ا مواز للمستوى اَ تَ حَ خلاف المستوى ا ب ح فانا نتصور من نقطة ا تمرير مستو قاطع للمستويات الثلاثة فيقطع المستويين المارين بنقطة ا فى مستقيمين مارين منها وموازيين للمستقيم الذى يتقاطع فيه المستوى القاطع بالمستوى المعلوم (٢٠٥ نتيجة ٣) وهو محال

نتيجة ١ — المحل الجامع للمستقيمات المارة من نقطة واحدة بالتوازى لمستوى معلوم هو مستو مواز للمستوى المذكور

وذلك لان اثنين منها يتعين بهما مستو مواز للمستوى المعلوم وحيث انه لا يمكن أن يمر بالنقطة المفروضة الا مستو واحد يوازى المستوى المذكور فتكون جميع هذه المستقيمات موجودة فى مستو واحد يوازى المستوى المعلوم

نتيجة ٢ — اذا قطع مستو أحد مستويين متوازيين فانه لابد أن يقطع الثانى

نتيجة ٣ — اذا قطع مستقيم احد مستويين متوازيين فانه لابد أن يقطع الثانى

لانا اذا مررنا بهذا المستقيم مستويا فانه يقطع المستويين المتوازيين فى مستقيمين متوازيين

وحيث ان المستقيم المعلوم يقطع احد هذين المستقيمين المتوازيين فانه يقطع الثانى واذن فيقطع المستوى المشتمل على هذا المستقيم

نتيجة ٤ — المستقيم أو المستوى الموازى لاحد مستويين متوازيين يكون موازيا للثانى لانه اذا قطعه فانه يقطع الثانى و بناء عليه فالمستويان الموازيان لثالث متوازيان

دعوى نظـــــرية

(٢٠٩) الزاويتان الغير الموجودتين فى مستو واحد اللتان أضلاعهما المتناظرة متوازية ومتجهة فى اتجاه واحد تكونان متساويتين ويكون مستوياهما متوازيين (شكل ١٨٦)

ليكن اب يوازى أَبَ ومتحدا معه فى الجهة , اح يوازى أَحَ ومتحدا أيضا معه فى الجهة فتاخذ اب = أَبَ , اح = أَحَ ثم نصل بح , بَحَ , اأَ , ببَ , ححَ

فالشكل ابأَبَ يكون متوازى الاضلاع لان فيه الضلعين المتقابلين اب , أَبَ متوازيان ومتساويان وحينئذ يكون الضلعان اأَ , ببَ متوازيين ومتساويين أيضا وبمثل ذلك يبرهن على أن ححَ , اأَ متوازيان ومتساويان واذن يكون ببَ , ححَ متوازيين ومتساويين ويكون الشكل ببَححَ متوازى الاضلاع ويكون فيه بح = بَحَ ويوازيه وحينئذ فالمثلثان ابح , أَبَحَ متساويان لتساوى الاضلاع الثلاثة المتناظرة فيهما وينتج من تساويهما أن الزاوية ب اح = الزاوية بَ أَ حَ

وأما توازى مستويهما فهو ناتج من النظرية المتقدمة (٢٠٨)

تنبيه — اذا اختلف ضلعا زاوية أَ فى الجهة مع ضلعى زاوية ا مع بقاء التوازى بينها فان الزاوية التى تحدث بين مثل هذين الضلعين تكون مساوية لزاوية أَ أو مساوية لزاوية ا وأما اذا اتحد ضلعان من أضلاع الزاويتين المذكورتين فى الجهة واختلف الضلعان الآخران فيها فان الزاوية التى تحدث بين مثل هذين الضلعين تكون مكملة لزاوية أَ أو لزاوية ا

نتيجة — اذا فرض مستقيمان ا , ب موضوعان بطريقة ما فى الفراغ فانه يطلق على الزاوية الحادثة بين المستقيمين المارين من أى نقطة بالتوازى للمستقيمين المفروضين اسم زاوية المستقيمين الفراغيين

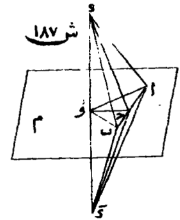
ولاجل أن يكون هذا التعريف عاما يجب أن يبرهن على ان هذه الزاوية غير مرتبطة بوضع النقطة التى اختيرت لمد المستقيمين المتوازيين وهذا أمر ينتج من النظرية المتقدمة

الفصـــــل الثـالث

فى المستقيمات والمســتويات المتعامــدة

دعوى نظـــــرية

(٢١٠) كل مستقيم عمودى على مستقيمين من مستو يكون عمودا على أى مستقيم من المستوى المذكور (شكل ١٨٧)



وهذه الدعوى على ثلاثة أحوال

الحالة الاولى ـ ان يكون المستقيم ء و عمودا على المستقيمين و ا و و ب المارّين من موقعه فى المستوى (موقع العمود على المستوى هو نقطة تقابله به) ويطلب البرهنـة على انه عمود على أى مستقيم مثل و ح مار من موقعه وفى المستوى المذكور

ولذلك يمد العمود ء و تحت المستوى بمقـدار و ءَ = و ء ثم تقطع المستقيمات الثـلاثة و ا , و ب , و ح بالمستقيم ا ح ب ويوصل النقطتان ء , ءَ بكل واحدة من النقط الثلاثة ا , ب , ح فالمستقيمان ا ء , ا ءَ متساويان لوجود نقطة ا على العمود او المقام على منتصف ء ءَ ومثلهما المستقيمان ب ء , ب ءَ واذن فالمثلثان ء ا ب , ءَ ا ب متساويان لتساوى الاضلاع الثلاثة المتناظرة فيهما ثم اذا دور المثلث ءَ ح ا حول الضلع ا ح فانه يمكن وضع نقطة ءَ على نقطة ء وحيث ان نقطة ح ثابتة فى أثناء الحركة فينطبق الضلع ءَ ح على الضلع ء ح ويساويه وحينئذ يكون المثلث ء ح ءَ متساوى الساقين وحيث ان المستقيم ح و واصل من رأسه الى منتصف قاعدته فيكون عمودا عليها (٢٩ ثالثا)

الحالة الثانية ـ ان يكون المسـتقيم ء و عمودا على المستقيمين و ا , و ب المارين من موقعه فى المسـتوى ويطلب البرهنة على انه عمود على أى مستقيم مثـل ب ح من المسـتوى المذكور

وللبرهنة على ذلك يقال اذا مد من نقطة و مستقيم يوازى ب ح فيكون موجودا فى المستوى م وعمودا على و ء (الحالة الاولى) واذن فيكون ء و عمودا على ب ح (٢٠٩ نتيجة)

الحالة الثالثة ـ ان يكون المستقيم ء و عمودا على مستقيمين ايا كانا فى المسـتوى ويطلب البرهنة على انه عمود على أى مستقيم من المستوى

وذلك لانه اذا رسم من نقطة و موقع العمود المستقيمان و ا و و ب موازيان بالتناظر للمستقيمين المفروض تعامدهما على المستقيم د و فتكون كل واحدة من الزاويتين د و ا و د و ب قائمة (٢٠٩) واذن فيكون د و عمودا على أى مستقيم مرسوم فى المستوى (الحالة الاولى والثانية)

تنبيه — المستقيم العمودى على مستو هو ما كان عمودا على كل مستقيم يرسم فى المستوى ويشاهد مما سبق البرهنة عليه فى النظرية المتقدمة انه يكفى لان يكون مستقيم عمودا على مستو ان يكون عمودا على مستقيمين مرسومين فى المستوى

نتيجة — اذا كان مستقيم عمودا على مستوى مستقيمين ا و ب موازيين لمستوآخر يكون عمودا على المستوى المذكور لانه اذا مد من نقطة ما من المستوى الاخير مستقيمان موازيان للمستقيمين ا و ب فيكونان موجودين فيه (٢٠٥ نتيجة ١) وعمودين على المستقيم الاول واذن فيكون هذا المستقيم عمودا على كل مستقيم مرسوم فى المستوى و بناء عليه يكون عمودا على المستوى

دعوى نظرية

(٢١١) كل نقطة مفروضة لا يمكن أن يمد منها الا مستقيم واحد عمودى على مستو معلوم (شكل ١٨٨)

وهذه الدعوى على حالتين

الحالة الاولى — أن تكون النقطة المفروضة خارج المستوى المعلوم م ولتكن هـ فيرسم لذلك مستقيم ما ا ب فى المستوى ثم يتصور مرير مستو بالمستقيم المذكور وبنقطة هـ (٢٠٣ أولا) وفى هذا المستوى ينزل من نقطة هـ العمود هـ ا على المستقيم ا ب ثم يقام من نقطة ا الموجودة فى المستوى م العمود ا و على ا ب ثم يتصور مرير مستو بالمستقيمين اهـ و ا و المتقاطعين (٢٠٣ أولا) وفيه يمكن انزال من نقطة هـ العمود هـ و على ا و فيكون عمودا على المستوى م

لان المستقيم ا ب عمود على المستقيمين ا و و اهـ الموجودين فى المستوى او هـ فيكون عمودا على و هـ واذن يكون هـ و عمودا على المستقيمين او و ا ب الموجودين فى المستوى م

فيكون عمودا عليه وبذلك يشاهد امكان انزال من نقطة ه العمود هو على المستوى م
ثم اذا قيل بامكان انزال عمود آخر منها هب على المستوى المذكور كان المثلث الحادث هوب
فيه زاويتان قائمتان وهو محال أو أنه أمكن من نقطة ه فى مستوى هوب انزال عمودى
هو , هب على المستقيم بو وهو محال

الحالة الثانية — أن تكون النقطة المفروضة كائنة على المستوى م ولتكن و فيرسم لذلك
مستقيم ما اب فى المستوى وينزل من نقطة و العمود وب على هذا المستقيم ثم يتصور تمرير
مستو ما بالمستقيم اب غير المستوى م وفى هذا المستوى يمكن اقامة العمود اه على اب
ثم يقام من نقطة و فى مستوى المستقيمين او , اه العمود وه على المستقيم وا
فيكون عمودا على المستوى م (والبرهنة على ذلك مثل المتقدمة)
ثم اذا قيل بامكان اقامة عمود آخر وى على المستوى م فان مستوى هذين العمودين يقطع
المستوى م فى المستقيم وح واذن فقد أمكن اقامة العمودين وه , وى على وح
فى المستوى هوح وهو محال

دعوى نظـــــرية

(٢١٢) كل نقطة مفروضة لا يمكن أن يمر بها الا مستو واحد عمودى على مستقيم معلوم وهذه
الدعوى على حالتين
الحالة الاولى (شكل ١٨٩) — أن تكون النقطة المفروضة خارج المستقيم المعلوم ولتكن ح
فيتصور بالمستقيم هه َ وبنقطة ح مستو ينزل فيه من
نقطة ح العمود حو على هه َ ثم يتصور أيضا تمرير مستو
آخر كيفما اتفق بالمستقيم هه َ وفيه يقام من نقطة و العمود
وا على هه َ فيكون مستوى المستقيمين حو , وا
عمودا على هه َ (٢١٠)
ثم اذا قيل بامكان تمرير مستو آخر من نقطة ح عمود على هه َ
وقابله فى نقطة ب كان المثلث الحادث حبو فيه زاويتان
قائمتان وهو محال وان قيل بامكان تمرير مستو آخر بالمستقيم حو عمود على هه َ فان المستوى
هه َا يقطع هذين المستويين فى مستقيمين عمودين على هه َ وهو محال

الحالة الثانية (شكل ١٩٠) - أن تكون النقطة المفروضة و على المستقيم هـ هـَ فيمر لذلك بالمستقيم هـ هـَ مستويان ويقام فيهما عليه العمودان وا و وب فيكون مستوى هذين العمودين عمودا على هـ هـَ

ثم اذا قيل بامكان تمرير مستو آخر عمودى على هـ هـَ ومار بنقطة و فان أحد المستويين هـ هـَ ا و هـ هـَ ب يقطع المستويين العموديين على هـ هـَ فى مستقيمين ب و و بَ و عمودين على هـ هـَ وهو محال

نتيجة - المحل الجامع لجميع الاعمدة المقامة على المستقيم هـ هـَ من نقطة و فى الفراغ هو المستوى العمودى على هـ هـَ المار بنقطة و (شكل ١٩١)

وذلك لان اثنين منها يتعين بهما وضع المستوى م العمودى على هـ هـَ و المار بنقطة و ولما كان لا يمكن أن يمر بنقطة و الا مستو واحد عمودى على هـ هـَ فتكون جميع الاعمدة موجودة فى هذا المستوى

دعوى نظـــــرية

(٢١٣) اذا أنزل من نقطة خارج مستو عمود عليه وأنزل من موقعه عمود على مستقيم كائن فيه ووصلت نقطة تقابلهما باحدى نقط المستقيم العمودى على المستوى كان هذا المستقيم عمودا على المستقيم الكائن فى المستوى (وتسمى هذه النظرية بنظرية الاعمدة الثلاثة شكل ١٨٨)

ليكن هـ و عمودا على المستوى م و وا عمودا على ا ب فانه ينتج من الفروض أن ا ب عمود على المستقيمين ا و و و هـ من المستوى هـ ا و (٢١٠ تنبيـه) فيكون عمودا عليـه واذن فيكون عمودا على ا هـ وهو المراد

دعوى نظـــــرية

(٢١٤) اذا أنزل من نقطة خارج مستو مستقيم عمود عليه وجملة موائل فانه يحدث

أولا - أن العمود أقصر من كل مائل

ثانيا ـ المائلان اللذان افترقا بعدين متساويين عن موقع العمود متساويان
ثالثا ـ المائلان اللذان افترقا عن موقع العمود بعدين مختلفين أبعدهما أطول
رابعا ـ عكس جميع ما تقدم صحيح (شكل ١٩٢)

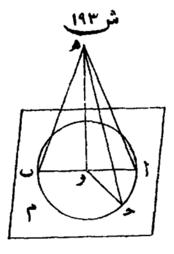
ليكن هو عمودا على المستوى م و ها و هب و هح موائل و او = ب و

برهان الاول ـ حيث كان هو فى المستوى هوا عمودا على وا كان ها مائلا عليه ويكون هو < ها

برهان الثانى ـ حيث ان المثلثين هوا و هوب فيهما زاوية قائمة محاطة باضلاع متساوية فيهما النظير لنظيره فيكونان متساويين ويكون ها = هب

برهان الثالث ـ يؤخذ من وح البعد وء = وا فى المستوى هوح المائل هح > هء وحيث كان هء = ها يكون هح > ها

برهان الرابع ـ يبرهن على عكس النظريات المتقدمة بواسطة ترجيع الامر الى الاستحالة فيقال مثلا اذا كان هو أصغر من أى مستقيم مثل ها ممدود من نقطة ه الى المستوى م فيكون عمودا عليه لانه ان لم يكن كذلك لكان مائلا عليه وبذلك لا يكون أصغر الأبعاد المحصورة بين نقطة ه والمستوى وهو خلاف وهكذا



تنبيه ـ العمود النازل من أى نقطة على مستو يسمى بعد النقطة عن المستوى

نتيجة ـ المحل الجامع لمواقع الموائل المتساوية الممدودة من نقطة فراغية الى مستو هو محيط دائرة مركزه موقع العمود على المستوى المذكور (شكل ١٩٣) لانه حيث كانت جميع هذه الموائل متساوية فتكون أبعادها عن موقع العمود كذلك (الرابع)

دعوى نظـــــرية

(٢١٥) المستوى العمودى على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودا على الثانى وللبرهنة على ذلك يقال من المعلوم أن المستقيمين المتوازيين يصنعان زاويتين متساويتين مع أى مستقيمين

متوازيين ممدودين من نقطتي تقابلهما بالمستوى (٢٠٨) فاذا كان أحدهما عمودا على جميع مستقيمات المستوى فيكون الثاني كذلك أعني يكون عمودا على المستوى

نتيجة - عكس هذه النظرية صحيح أعني أن المستقيمين العمودين على مستو يكونان متوازيين لانه ان لم يكونا كذلك لتلاقيا في نقطة واذن فقد أمكن منها انزال عمودين على المستوى وهو محال

دعوى نظـــــرية

(٢١٦) المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عمودا على الثاني (شكل ١٩٤)

ليكونا م و ن المستويين المعلومين و ا ب المستقيم المعلوم العمودي على المستوى م وللبرهنة على ذلك يقال

أولا - المستقيم ا ب لابد أن يقابل المستوى ن الثاني (٢٠٨ نتيجة ٣)

ثانيا - يمرر بالمستقيم ا ب مستو ما يقطع المستويين المتوازيين في المستقيمين المتوازيين اح و ب ء وحيث كان ا ب عمودا على أحدهما فيكون عمودا على الثاني ب ء وباعادة هذا العمل بواسطة تمرير مستو ثان وثالث وهكذا بالمستقيم ا ب فانها تثبت النظرية

نتيجة - عكس هذه النظرية صحيح أعني أن المستويين العمودين على مستقيم متوازيان لانه ان لم يكونا كذلك لتقاطعا في مستقيم وحينئذ فقد أمكن من احدى نقط خط التقاطع تمرير مستويين عمودين على مستقيم وهو محال

الفصل الرابع

في مسقط النقطة والمستقيم

تعريفان

(٢١٧) مسقط اى نقطة على مستو هو موقع العمود النازل من هذه النقطة على هذا المستوى

(٢١٨) ومسقط مستقيم على مستو هو المحل الجامع لمساقط نقط المستقيم على المستوى

دعوى نظرية

(٢١٩) مسقط المستقيم على المستوى هو خط مستقيم (شكل ١٩٥)

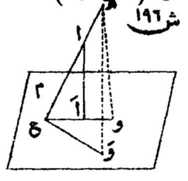
لتكن ح مسقط نقطة ا على المستوى م ن فنمرر بالمستقيمين ب ا و ا ح مستويا يقطع المستوى م ن في المستقيم ح ء فاذا أريد الآن اسقاط نقطة ب فانا ننزل منها العمود ب ء على المستوى فيكون موازيا ا ح (٢١٥ نتيجة) وبناء عليه يكون موجودا بتمامه في المستوى ب ا ح (٢٠٣) ويكون موقعه ء موجودا على المستقيم ح ء

وحينئذ يكون المحل الجامع لمساقط جميع نقط المستقيم ا ب هو مستقيم آخر ح ء

نتيجة ـ يكفي لايجاد مسقط مستقيم على مستو أن يجمع بين مسقطي نقطتين من نقطه بمستقيم

دعوى نظرية

(٢٢٠) الزاوية الحادة الحادثة من أي مستقيم ومسقطه على مستو هي أصغر جميع الزوايا الحادة الحادثة من المستقيم المذكور وأي مستقيم مد من موقعه في المستوى (شكل ١٩٦)



ليكن هـ ع المستقيم المعلوم و ع و مسقطه على المستوى م و ع وَ مستقيما آخر ممدودا في المستوى من الموقع ع

فاذا أخذ ع وَ = ع و ووصل هـ وَ فالمثلثان هـ ع و و هـ ع وَ فيهما ع هـ مشترك بينهما والضلع ع وَ = ع و لكنه حيث كان الضلع هـ و أصغر من هـ وَ تكون زاوية هـ ع و أصغر من زاوية هـ ع وَ وهو المطلوب

تنبيه ـ الزاوية الحادة هـ ع و الحادثة من المستقيم هـ ع ومسقطه ع و على المستوى م تسمى بميل المستقيم على المستوى أو بزاوية المستقيم والمستوى

نتيجة ـ الزاوية المنفرجة التي يصنعها المستقيم مع امتداد مسقطه هي بناء على ما تقدم أكبر جميع الزوايا التي يمكن حدوثها بين المستقيم المذكور وأي مستقيم مد من موقعه في المستوى

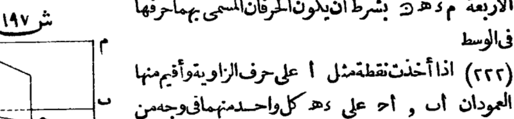
الفصـــــل الخـامس

فى الزوايا الزوجيـــة

تعـاريف

(٢٢١) الزاوية الزوجية هى الشكل المتكون من مستويين متقاطعين يسميان وجها الزاوية وخط تقاطعهما يسمى حرف الزاوية

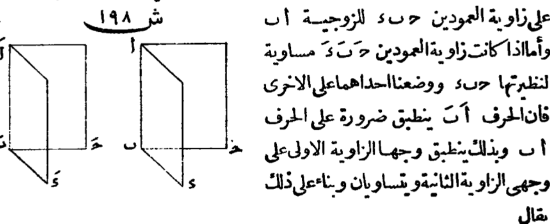
وتقرأ الزاوية الزوجية بالحرفين الهجائيين المسمى بهما نقطتان من حرفها اذا كانت منفردة مثل زاوية ءهـ (شكل ١٩٧) وأما اذا اشتركت فى الحرف ءهـ مع زوايا أخرى فتقرأ بالاحرف الاربعة م ءهـ ن بشرط أن يكون الحرفان المسمى بهما حرفها فى الوسط



(٢٢٢) اذا أخذت نقطة مثل ا على حرف الزاوية وأقيم منها العمودان اب , احـ على ءهـ كل واحـد منهما فى وجه من وجهى الزاوية فان مقدار الزاوية ب ا حـ الواقعة بين هـذين العمودين ثابت دائماًمهـما كان وضع نقطـة ا على الحرف ولهذا تسمى هذه الزاوية بزاوية العمودين أو بالزاوية المستوية للزاوية الزوجية وهى التى يقدر بها ميل أحد المستويين على الآخر

(٢٢٣) الزاويتان الزوجيتان المتساويتان هـما اللتان ينطبق أوجههما على بعضهـما بمجرد انطباق حرفيهما

تنبيـه - اذا طبقنا الزاوية الزوجية اَ بَ (شكل ١٩٨) على مساويتها ا ب ووقعت نقطة بَ على نقطة ب فان زاوية العمودين حَ بَ ءَ للزوجيـة اَ بَ تنطبق ضرورة على زاوية العمودين حـ ب ء للزوجيـة ا ب

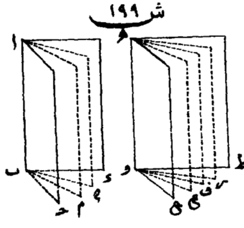


وأما اذا كانت زاوية العمودين حَ بَ ءَ مساوية لنظيرتها حـ ب ء ووضعنا احداهما على الاخرى فان الحرف اَ بَ ينطبق ضرورة على الحرف ا ب وبذلك ينطبق وجهـا الزاوية الاولى على وجهى الزاوية الثانية ويتساويان وبناء على ذلك يقال

اولا — يتساوى الزاويتان الزوجيتان اذا تساوى زاويتاهما المستويتان
ثانيا — يتساوى الزاويتان المستويتان اذا تساوى زاويتاهما الزوجيتان

دعوى نظـــــــرية

(٢٢٤) النسبة بين الزاويتين الزوجيتين هى على أى حالة كانت كالنسبة بين زاويتيهما المستويتين (شكل ١٩٩)



لنفرض أولا أن بين الزوجيتين مقياسا مشتركا أى زاوية زوجية منحصرة فيهما مرارا صحيحة بأن انحصرت ثلاث مرات فى احداهما وأربعة فى الثانية فتكون النسبة بين الزوجيتين كالنسبة بين هذين العددين الصحيحين أعنى يكون

$$\frac{\text{حا ب ء}}{\text{ع ه و ط}} = \frac{٣}{٤}$$

فاذا مررنا بكل واحدة من النقطتين ب و و مستويا عموديا على الحرف المقابل لها فان هذين المستويين يقطعان جميع الاوجه فى مستقيمات عمودية على الحرفين ا ب و و ه وبذلك تكون الزوايا حـ ب م و م ب ف و ف ب ء و ع و ع و ... الخ هى الزوايا المستوية المقابلة للزوايا الزوجية الصغيرة وحيث كانت متساوية تكون المستوية كذلك (٢٢٣ تنبيه) ويشاهد انقسام زاوية حـ ب ء الى ثلاث زوايا متساوية وزاوية ع و ط الى أربع زوايا متساوية فتكون النسبة بين الزاويتين حـ ب ء و ع و ط كالنسبة بين العددين الصحيحين ٣ و ٤ ويحدث

$$\frac{\text{حـ ب ء}}{\text{ع و ط}} = \frac{٣}{٤}$$

وبمقارنة هذا التناسب بالسابق ينتج

$$\frac{\text{حـ ب ا ء}}{\text{ع ه و ط}} = \frac{\text{حـ ب ء}}{\text{ع و ط}}$$

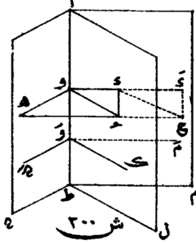
وأما اذا لم يوجد بين الزاويتين الزوجيتين مقياس مشترك فانه يبرهن على هذه النظرية بعين الطريقة التى اتبعت بنمرة (٨٠ جزء أول)

نتيجة — ينتج مما ذكر أن الزاوية المستوية أو زاوية العمودين يمكن اعتبارها مقاسا للزاوية الزوجية لان المقدار الذى ينتجه مقاس الزوجية هو عين الذى ينتجه مقاس المستوية عند مقارنة

كل منهما بالوحدة التى من نوعها بشرط أن تكون وحدة الزوايا المستوية هى زاوية العمودين لوحدة الزوايا الزوجية

دعوى نظـــــــرية

(٢٢٥) كل نقطة من نقط المستوى المنصف لزاوية زوجية على بعدين متساويين من وجهيها وبالعكس كل نقطة توجد على بعدين متساويين من وجهى زاوية زوجية تكون احدى نقط المستوى المنصف لها شكل (٢٠٠)



من المعلوم ان المستوى المنصف لزاوية زوجية هو مستو مار بحرفها وقاسمها الى زاويتين زوجيتين متساويتين

أولا — اذا فرضت نقطة حـ على المستوى ا ل المنصف للزاوية الزوجية م ا ط ن وكان بعداها عن وجهيها ا م و ا ن هما حـ د , حـ هـ يقال

حيث كان حـ د عمودا على المستوى م فيكون عمودا على المستقيم و ا (٢١٠) وكذا حيث كان حـ هـ عمودا على المستوى ن فيكون عمودا أيضا على و ا وحينئذ يكون هذا المستقيم و ا عمودا على المستوى حـ د و هـ (٢١٠) وتكون اذن زاوية د و حـ مقاس الزاوية الزوجية م ا و ل وزاوية حـ و هـ مقاس الزاوية الزوجية ل ا و ن وحيث ان الزاويتين الزوجيتين متساويتان فرضا تكون المستويتان كذلك ويكون المثلثان القائما الزاوية حـ و د , حـ و هـ متساويين لتساوى فيهما وتر وزاوية من احدهما النظيريهما من الثانى وينتج من تساويهما ان حـ د = حـ هـ

ثانيا — اذا كان البعدان حـ د , حـ هـ متساويين فانه يمر المستوى حـ ا و فيكون المستقيم حـ و منصفا ضرورة لزاوية هـ و د وحيث ان الزاويتين المستويتين حـ و د , حـ و هـ متساويتان يكون الزوجيتان كذلك وبذلك يكون المستوى ا ل منصفا للزاوية الزوجية

نتيجة — كل نقطة مثل ع مأخوذة خارج المستوى المنصف هى على بعدين مختلفين من وجهى الزاوية الزوجية لانه لو كان الامر بخلاف ذلك لوجدت ضرورة على المستوى المنصف وهو بخلاف الفرض

المستوى المنصف لزاوية زوجية هو المحل الهندسى للنقط المتساوية البعد عن وجهيها

الفصـــل الســادس

فى المستويات المتعامدة

تعـــــريف

(٢٢٦) المستوى العمودى على آخر هو ما يصنع معه زاويتين زوجيتين متجاورتين متساويتين يقال لكل واحدة منهما قائمة

دعوى نظـــــرية

(٢٢٧) كل مستقيم كائن فى مستو لا يمكن أن يمر به الا مستو واحد عمودى على الاوّل

يبرهن على هذه النظرية بمثل ما سبقت البرهنة به على نظيرتها فى الباب الاوّل من الجزء الاوّل

نتيجة ـ يمكن ان يستعان بهذه النظرية على اثبات النظريات الآتية

الاولى ـ اذا لاقى مستو مستويا آخر فانه يصنع معه زاويتين زوجيتين متجاورتين مجموعهما يساوى زاويتين زوجيتين قائمتين

الثانية ـ اذا كان مجموع الزوجيتين المتجاورتين مساويا قائمتين يكون وجهاهما المتطرفان فى استواء واحد

الثالثة ـ اذا تقاطع مستويان فكل زاويتين زوجيتين متقابلتين بالحرف متساويتان

الرابعة ـ المستويان المنصفان لزاويتين زوجيتين متجاورتين متعامدان

دعوى نظـــــرية

(٢٢٨) الزاوية الزوجية القائمة تكون زاويتها المستوية كذلك وبالعكس

أوّلا ـ اذا كان المستوى م عمودا على المستوى ى وقطعناهما بمستو عمودى على خط تقاطعهما فانه يحدد عليهما زاويتيهما المستويتين وتكونان متجاورتين وحيث كان الزوجيتان متساويتين تكون المستويتان كذلك واذن تكون كل واحدة منهما قائمة

ثانيا ـ اذا كانت الزاويتان المستويتان قائمتين وحادثتين من مد مستو عمودى على خط تقاطع مستويين فانه يجب انه تكون الزوجيتان متساويتين واذن تكون كل واحدة منهما قائمة

تنبيه ـ يكفى فى البرهنة على تعامد مستويين ان يبرهن على ان الزاوية المستوية للزاوية الزوجية الحادثة بينهما تكون قائمة

دعوى نظـــــــرية

(٢٢٩) كل مستو يمر بمستقيم عمودى على مستو آخر يكون عمودا على هـذا المستوى الاخـير كافى (شكل ٢٠١)

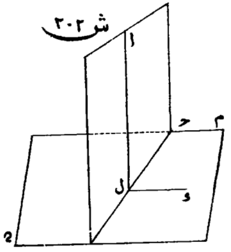
ش ٢٠١

ليكن ب و عمودا على المستوى حـ ى والمستوى م ى مارا بالمستقيم ب و فاذا كان و حـ عمودا على خط تقاطع المستويين ا ى تكون زاوية ب و حـ قائمة لان ب و عمود على المسـتوى حـ ى وحيث انها هى الزاوية المستوية المنسوبة للزاوية الزوجية الواقعـة بين المستويين فيكونان متعامدين وهو المراد (٢٢٨)

نتيجة ـ كل مستو يوازى المستقيم ب و يكون عمودا على المستوى حـ ى لانه اذا أخذت فيه نقطة ومد منها مستقيم يوازى ب و فيكون موجودا بتمامه فيه (٢٠٥ نتيجة ٤) ويكون أيضا عمودا عليه (٢١٥)

دعوى نظـــــــرية

(٢٣٠) وبالعكس اذا تعامد مستويان فكل مستقيم مد فى احدهما عموديا على خط تقاطعهما يكون عمودا على الثانى (شكل ٢٠٢)



ليكن المستويان م و ا متعامدين ومد المستقيم ا ل فى المستوى ا عموديا على حـ ب فيمد ل ى عمودا على حـ ب فى المستوى م فتكون زاوية ا ل ى هى الزاوية المستوية للزاوية الزوجيـة ا ب حـ د وحيث كانت الزاوية الزوجيـة قائمة تكون المستوية كذلك ويكون ا ل عمودا على ل ى وحيث كان عمودا على حـ ب فيكون اذن عمودا على المستوى م د

نتيجة ١ ـ اذا تعامد مستويان وأخذت نقطة على احدهما وأنزل منها عمود على الثانى كان هذا العمود موجودا بتمامه فى المستوى الاوّل

لانه ان لم يكن كذلك وانزل من النقطــة المذكورة عمود على خط تقاطع المستويين فيكون عمودا على المستوى الثانى كما تقدم ذكره وحيث انه لا يمكن من النقطة المذكورة الا انزال عمود واحد على المستوى فالعمودان يتحدان اذن ويصيران واحدا وهو المطلوب

نتيجة ٢ ـ اذا تعامد مستويان فكل مستقيم مثــل ا عمود على احدهما م مثلا يكون موازيا للثانى وللبرهنة على ذلك تؤخذ نقطة فى المستوى ٯ وينزل منها عمود على المســتوى م فيكون موجودا بتمــامه فى المستوى ٯ (نتيجة ١) ويكون أيضا موازيا للمستقيم ا وحيث ان المستقيم ا موازلمستقيم كائن فى المستوى ٯ فيكون موازيا له (٢٠٥ نتيجة ٥) وهو المراد

دعوى نظــــــرية

(٢٣١) المسـتويان العموديان على مسـتو ثالث يكون خط تقاطعهما عموديا على المستوى الاخير (شكل ٢٠٣)

اذا كان ا ب خط تقــاطع مســتويين عموديين على المســتوى م ٯ فانا نأخــذ نقطة ما ا مثلا من خط التقاطع وننزل منها عمودا على المســتوى م ٯ فيكون موجودا بتمــامه فى كلا المســتويين (٢٣٠ نتيجة ١) واذن فيكون هو خط تقاطعهما

نتيجــة ـ ويمكن التعبير عن منطوق هــذه النظرية بطريقة أخرى فيقال المستوى العمودى على مستويين متقاطعين يكون عموديا على خط تقاطعهما

دعوى نظـــــــرية

(٢٣٢) باى مستقيم لا يمكن أن يمر الا مستو واحد فقط عمودى على آخر معلوم

أولا ـ تؤخذ نقطة على المستقيم المعــلوم وينزل منها عمود على المستوى ثم يمر مستو بهذين المستقيمين فيكون عمودا على المستوى المعلوم لاشتمــاله على مستقيم عمودى عليه (٢٢٩)

ثانيا ـ من المعلوم ان كل مستو يمر بالمستقيم المعلوم ويكون عمودا على المستوى المفروض لابد أن يحتوى على العمود المنزل من احدى نقط المستقيم على المستوى المذكور وحيث انه لا يمكن ان يمر بالمستقيمين المذكورين الا مستو واحد فقد ثبت المطلوب

تنبيه ـ ماذكرناه من البراهين يقتضى ان لا يتحد المستقيم المعلوم بالعمود المنزل من احدى نقطه على المستوى أعنى ان لا يكون المستقيم المفروض عمودا على المستوى المعلوم

نتيجة ـ وينتج من ذلك ان المستوى المسقط للمستقيم يكون عمودا على مستوى المسقط

دعوى نظـــــــرية

(٢٣٣) كل مستقيمين غير موجودين فى مستو واحـد يمكن دائما ان يمد لهما أولا عمود مشترك بينهـما وثانيا انه لا يمكن مد غيره وثالثا أن يكون هـذا العمود أصغر الابعاد المحصورة بينهما (شكل ٢٠٤)

شكل ٢٠٤

ليكونا أ د , ب هـ المستقيمين المعلومين الغير الموجودين فى مستو واحد فتؤخذ نقطة هـ على أحدهما ويمد منها المستقيم هـ و موازيا للثانى ثم يمرر بالمستقيمين هـ و , هـ ب مستو فيكون موازيا للمستقيم أ د (٢٠٥ نتيجة ٥)

فاذا كان المستقيمان المفروضان فى مستو واحد كان هذا المستوى مشتملا على أ د ضرورة ثم ينزل من نقطة د احدى نقط المستقيم أ د العمود د حـ على المستوى م ن ويمد من موقعه حـ المستقيم حـ ب موازيا أ د فيكون موجودا بتمامه فى المستوى م ن (٢٠٥ نتيجة ١) ويقابل ب هـ لانه ان لم يقابله كان موازيا له ويترتب على ذلك موازاة المستقيمين ب هـ , أ د وهو مخالف للفرض ثم يمد من نقطة التقابل ب المستقيم ب أ موازيا للمستقيم د حـ اذا تقرر هذا يقال

أولا ـ ان المستقيم أ ب عمود مشترك بين المستقيمين المفروضين لانه حيث كان المستقيم المذكور موازيا د حـ العمودى على المستوى م ن فيكون عمودا عليه أيضا وبناء عليه يكون عمودا على المستقيمين ب هـ , ب حـ او أ د الموازى ب حـ

ثانيا ـ انه لا يمكن تمرير خلاف هذا العمود المشترك بينهما الا انه لو قيل ان د هـ عمود آخر مشترك بينهما فيكون ضرورة عمودا على ب هـ , و هـ الموازى أ د واذن يكون عمودا على المستوى م ن لكنه حيث كان د حـ عمودا على المستوى م ن فقد أمكن انزال من نقطة هـ عمودين على المستوى م ن وهو محال (٢١١)

ثالثا ـ ان هذا العمود المشترك هو أصغر الابعاد المحصورة بين المستقيمين المفروضين وذلك لان

كل مستقيم محصور بينهما غيره مثل ده أطول من العمود دح المنزل من نقطة د على المستوى م ن وحيث كان دح = اب يكون ده > اب

الفصل السابع

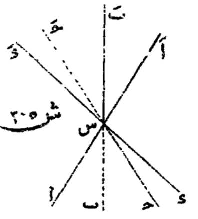
فى الزوايا المجسمة

تعاريف

(٢٣٤) الزاوية المجسمة هى الشكل المتكون من جملة مستويات متقاطعة مثنى ومجتمعة فى نقطة واحدة وتقاطعات المستويات يحدث عنها ما يسمى باحرف المجسمة ونقطة اجتماعها هى رأسها والزوايا المستوية المتكونة بين الاحرف تسمى أوجه المجسمة

(٢٣٥) متى كان عدد أوجه الزاوية المجسمة ثلاثة وهو أقل ما يمكن يقال لها زاوية مجسمة ثلاثية ولم نعتبر من الزوايا المجسمة الا المحدب منها أى الموضوع فى جهة واحدة من امتداد أحد الاوجه

(٢٣٦) اذا فرضت الزاوية المجسمة الرباعية مثلا س ا ب ح د (شكل ٢٠٥) ومدت الاحرف س ا و س ب و س ح و س د جهة الرأس س فانه يتشكل من ذلك زاوية مجسمة رباعية أخرى س اَ بَ حَ دَ يقال لها مماثلة للاولى أعنى ان زوايا المجسمة الجديدة زوجية كانت أو مستوية هى عين زوايا المجسمة الاولى لكنه لا يمكن انطباق احداهما على الاخرى لانه لو طبق الوجه د س اَ على مساويه د س ا بحيث تكون أحرف المجسمتين فى جهة واحدة من الوجه المشترك يشاهد ان الزوايا المستوية والزوجية من المجسمتين موضوعة على ترتيب معكوس



فائدة

(٢٣٧) اذا أقيم من نقطة و المأخوذة على حرف الزاوية الزوجية اب العمود وع على الوجه اح بحيث يكون هو والوجه اد فى جهة واحدة بالنسبة للوجه اح ثم اقيم منها العمود وط على الوجه اد بحيث يكون هو والوجه اح فى جهة واحدة بالنسبة للوجه اد فان

الزاوية المستوية الحادثة ط و ح تكون مكملة للزاوية المستوية مقاس الزاوية الزوجية المعلومة (شكل ٢٠٦)

شكل ٢٠٦

وللبرهنة على ذلك يمرر بالمستقيمين و ح ، و ط العمودين على ا ب مستو فيكون ضرورة عمودا على ا ب ويقطع وجهى الزاوية الزوجية فى المستقيمين و هـ ، و ى العمودين على الحرف ا ب وتكون الزاوية الحادثة مقاسا للزاوية الزوجية لكنه حيث كان و ح عمودا على الوجه ا د تكون زاوية ى و ح مساوية قائمة وبعين هذا السبب تكون زاوية هـ و ط قائمة كذلك واذن يكون

ى و ح + هـ و ط = ط و ح + ى و هـ = ٢ ق وهو المطلوب

دعوى نظـــــرية

(٢٣٨) اذا أقيم من رأس زاوية مجسمة ثلاثية ثلاث أعمدة على أوجهها بحيث يكون كل واحد منها مع الحرف الثالث من المجسمة فى جهة واحدة بالنسبة للوجه المقام هو عمودا عليه فان الزاوية المجسمة الثلاثية الحادثة من هذه الاعمدة تكون مكملة للزاوية المجسمة المفروضة (ومعنى التكامل هنا هو أن تكون الزوايا المستوية من أيهما مكملة للزوجية من الثانية) (شكل ٢٠٧)

شكل ٢٠٧

فاذا أقيم العمود س حَ على الوجه ا س ب وكان هو والحرف ح س فى جهة واحدة بالنسبة للوجه ا س ب ثم اقيم العمود س بَ على الوجه ا س ح وكان هو والحرف س ب فى جهة واحدة بالنسبة للوجه ا س ح واقيم العمود س اَ على الوجه ب س ح وكان هو والحرف س ا فى جهة واحدة بالنسبة للوجه ب س ح يقال

أولا - حيث كان س حَ عمودا على الوجه ا س ب وهو والوجه ب س ح فى جهة واحدة بالنسبة للوجه ا س ب وكان أيضا س اَ عمودا على الوجه ب س ح وهو والوجه ا س ح فى جهة واحدة بالنسبة للوجه ب س ح تكون زاوية حَ س اَ مكملة للزاوية المستوية التى تقاس بها الزوجية س ب (٢٣٧) وبمثل ذلك يبرهن على ان زاوية اَ س بَ

مكملة للزاوية المستوية مقاس الزوجية س ح وان زاوية ىَ س حَ مكملة للزاوية المستوية مقاس الزوجية س ا

ثانيا — حيث كان س اَ عمودا على الوجه ب س ح فيكون عمودا على س ح وكذا حيث كان س ىَ عمودا على الوجه ا س ح فيكون عمودا على س ح وبناء عليه يكون س ح عمودا على المستوى اَ س ىَ وغير ذلك حيث كان س حَ عمودا على الوجه ا س ب وكان هو والحرف س ح فى جهة واحدة بالنسبة للوجه ا س ب تكون زاوية حَ س ح حادة وحيث قد ثبت ان س ح عمود على المستوى اَ س ىَ ومكون مع س حَ زاوية حادة فيكون حينئذ هو والحرف س حَ فى جهة واحدة بالنسبة للوجه اَ س ىَ

وبمثل ذلك يشاهد ان س ب عمود على المستوى اَ س حَ وانه والحرف س ىَ فى جهة واحدة بالنسبة لهذا المستوى وان س ا عمود على المستوى حَ س ىَ وانه هو والحرف س اَ فى جهة واحدة بالنسبة لهذا المستوى وحينئذ فيمكن اعتبار الزاوية س ا ب ح كأنها انشئت من الزاوية س اَ ىَ حَ بالطريقة التى أنشئت بها الزاوية س اَ ىَ حَ من الزاوية س ا ب ح واذن فتكون زواياها المستوية مكملة للزوايا المستوية التى تقاس بها الزوايا الزوجية من المجسمة س اَ ىَ حَ

دعوى نظـــــرية

(٢٣٩) اذا تساوى وجهان من زاوية مجسمة ثلاثيـة يتساوى الزاويتان الزوجيتان المقابلتان لهما وبالعكس (شكل ٢٠٨)

أولا — ليكن الوجه ب س ا = الوجه ح س ا وتطلب البرهنة على ان الزاوية الزوجيـة س ح تساوى الزاوية الزوجية س ب وللوصول الى ذلك نضع بجانب المجسمة المفروضـة مماثلتها سَ حَ اَ ىَ ثم نطبق الثانية على الاولى بان نضع الزوجيـة سَ اَ على مساويتها س ا وحيث ان الوجه اَ سَ حَ مساو للوجه ا س ح فيكون مساويا للوجه ا س ب واذن فينطبق الحرف سَ حَ على س ب وبمثل ما ذكر ينطبق الحرف سَ ىَ على الحرف س ح وبذلك ينطبق المجسمتان على بعضهما وتكون الزاوية الزوجية سَ ىَ مساوية للزاوية الزوجية س ح واذن تكون الزوجية س ب مساوية للزوجية س ح وهو المراد

ثانيا ـ لتكن الزوجية س ب مساوية للزوجية س ح وتطلب البرهنة على ان الوجه ب س ا مساو للوجه ح س ا

وللوصول الى ذلك نضع بجانب المجسمة الثلاثية المفروضة مماثلتها سَ حَ اَ بَ ثم نطبق الثانية على الاولى بان نضع الوجه حَ سَ بَ على مساويه ح س ب ومن حيث ان الزوجية سَ بَ مساوية للزوجية س ب وكانت هذه الاخيرة مساوية للزوجية س ح فرضا فتكون الزوجية سَ بَ مساوية للزوجية س ح واذن فيأخذ الوجه بَ سَ اَ اتجاه الوجه ح س ا وبمثل ماذكر يأخذ الوجه حَ سَ اَ اتجاه الوجه ب س ا وبذلك ينطبق الحرف سَ اَ على الحرف س ا وينطبق المجسمتان على بعضهما ويكون الوجه بَ سَ اَ المساوى للوجه ب س ا مساويا للوجه ا س ح أعنى ان الوجه ب س ا مساو للوجه ا س ح وهو المطلوب

دعوى نظـــــــرية

(٢٤٠) يتساوى المجسمتان الثلاثيتان اذا وجد فيهما واحد من الامور الآتية

أولا ـ اذا ساوى من احداهما زاوية زوجية والوجهان المحيطان بها النظائر لها من الثانية

ثانيا ـ اذا ساوى من احداهما وجه والزوجيتان المجاورتان له لنظائرها من الثانية

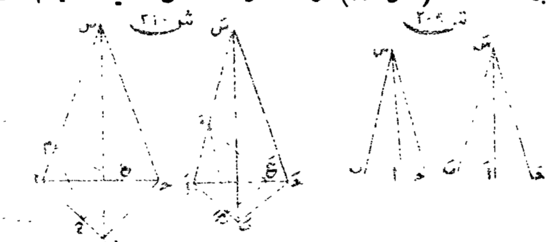
ثالثا ـ اذا تساوت فيهما الاوجه الثلاثة كل لنظيره

رابعا ـ اذا تساوت فيهما الزوايا الزوجية الثلاثة كل لنظيرتها

برهان الاول ـ (شكل ٢٠٩) تطبق احدى المجسمتين على الاخرى بالطريقة التى أجريت (بنمرة ٢٣٩) أولا

برهان الثانى ـ (شكل ٢٠٩) تطبق احدى المجسمتين على الاخرى بالطريقة التى أجريت (بنمرة ٢٣٩) ثانيا

برهان الثالث ـ (شكل ٢١٠) تؤخذ الاحرف الستة من المجسمتين متساوية ثم نصل



المستقيمات اح ، اب ، بح ، اَحَ ، اَدَ ، بَحَ فالمثلثات المتساوية الساقين الحادثة فى المجسمة الاولى وهى اس ب ، اس ح ، ب س ح تكون مساوية لنظائرها من الثانية كما لا يخفى واذن يكون المثلثان ا ب ح ، اَبَحَ متساويين لتساوى أضلاعهما الثلاثة المتناظرة اذا تقرر هذا ومررنا بالنقطة الاختيارية م من الحرف س ا مستويا عموديا على الحرف المذكور فانه يقطع الوجهين اس ح ، اس ب فى المستقيمين م ع ، م د وتكون الزاوية ع م د مقاسا للزوجية س ا وغير ذلك فان المستقيم م ع لابد أن يقابل المستقيم اح لانه اذا وازاه تكون زاوية س اح قائمة وهذا ممنوع هنا لان المثلث س اح متساوى الساقين ويعين هذا السبب يقابل المستقيم م د المستقيم ا ب ثم يوصل ع د ويؤخذ بعد ذلك البعد اَمَ = ام ويجرى فى نقطة مَ عين ما اجرى فى نقطة م فتكون زاوية عَ مَ دَ مقاس الزوجية اَ سَ ويوصل عَ دَ

فالمثلثان ع م ا ، عَ مَ اَ متساويان لتساوى ضلع ومجاورتا من الزوايا من احدهما لنظائرها من الثانى وينتج من تساويهما ان اع = اَعَ ، م ع = مَ عَ ويمثل ذلك يبرهن على ان اد = اَدَ ، م د = مَ دَ أما المثلثان ا ع د ، اَ عَ دَ ففى احدهما ضلعان والزاوية المحصورة بينهما مساوية لنظائرها من الثانى فيكونان متساويين وينتج من تساويهما ان ع د = عَ دَ واذن فالمثلثان ع م د ، عَ مَ دَ متساويان لتساوى الاضلاع الثلاثة المتناظرة فيهما وحينئذ تكون زاوية ع م د = عَ مَ دَ أعنى ان الزوجية س ا تساوى الزوجية سَ اَ وبذلك فقد رجع الامر الى الحالة الاولى

برهان الرابع - يقال لتكونا س ، سَ المجسمتين الثلاثيتين المعلومتين ، ط ، طَ مكملتيهما فمن حيث ان الزوايا الزوجية من المجسمتين المعلومتين س ، سَ متساويتان تكون الزوايا المستوية من مكملتيهما ط ، طَ أو أوجههما المتناظرة متساوية (٢٣٨) غير ان تساوى الاوجه المتناظرة من المجسمتين ط ، طَ يقتضى تساوى الزوايا الزوجية المتناظرة فيهما (الثالث) وهذا يستلزم تساوى الاوجه المتناظرة من المجسمتين الاصليتين س ، سَ وهو المراد

تنبيه ١ - النظريات الثلاثة الاول من هذه الدعوى لها نظائر فى تساوى المثلثات دون النظرية الرابعة حيث قد علم ان تساوى زوايا مثلثين لا يستلزم تساويهما بل يقتضى تشابههما فقط

تنبيه ٢ - اذا لم تكن الاجزاء المتساوية فى المجسمتين الثلاثيتين المعلومتين موضوعة على ترتيب واحد فلا تكون تلك المجسمات متساوية بل تكون متماثلة كما ذكر سابقا وفى مثل ذلك تجرى البراهين على احدى المجسمتين ومماثلتها

دعوى نظــــــرية

(٢٤١) أى وجه أو زاوية مستوية من زاوية مجسمة ثلاثية أصغر من مجموع الوجهين الآخرين (شكل ٢١١)

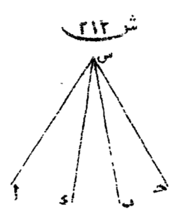
ليكن ا س ب الوجه الاكبر من المجسمة الثلاثية س وتطلب البرهنة على انه أصغر من ا س ح + ح س ب ولذلك تؤخذ الزاوية ب س ء من الزاوية الكبرى ب س ا مساوية لزاوية ب س ح ثم يمد المستقيم الاختيارى ب ء ا ويؤخذ س ح = س ء ويوصل ب ح و ا ح فالمثلثان ب س ء و ب س ح متساويان لتساوى من احدهما ضلعان والزاوية المحصورة بينهما لنظائرها من الثانى وينتج من تساويهما أن ب ء = ب ح

لكن المثلث ب ح ا فيه ب ا أو ب ء + ء ا < ب ح + ح ا أو ء ا < ا ح

ثم اذا قورن المثلثان ا س ح و ا س ء ببعضهما نجد أن الضلعين ا س و س ح من أحدهما مساويان لنظيريهما من الثانى غير انه لما كان الضلع الثالث من الاول وهو ا ح أكبر من نظيره ا ء تكون زاوية ا س ح أكبر من زاوية ا س ء وهو المراد

دعوى نظــــــريه

(٢٤٢) الزاوية الزوجيــة الكبرى من أى زاوية مجسمة ثلاثيــة يقابلها الوجــه الاكبر منها وبالعكس (شكل ٢١٢)



أولا — لتكن الزاوية الزوجية س ح من المجسمة الثلاثية س أكبر من الزوجية س ا وتطلب البرهنــة على ان الوجه ا س ب أكبر من الوجه ب س ح

وللوصول الى ذلك يمر بالحرف س ح مستو يصنع مع الوجه ح س ا الزاوية الزوجية ء س ح ا مساوية للزوجية س ا وهذا المستوى يقابل الوجه ا س ب فى المستقيم س ء وبذلك يكون فى المجسمة الثلاثية الحادثة س ا ء ح زاويتان زوجيتان متساويتان س ا و ء س ح ا فيكون الوجهان المقابلان لهما ح س ء و ء س ا متساويين

(٢٣٩ ثانيا) لكن المجسمة الثلاثية س ء ب ح فيها الوجه ح س ب < ح س ء + ب س ء
أو ح س ب < ب س ا وهو المطلوب

ثانيا - اذا كان الوجه ا س ب أكبر من الوجه ب س ح يجب أن تكون الزوجية س ح أكبر من الزوجية س ا لانه ان لم يكن كذلك وكانت تساويها أو أصغر منها لزم أن يكون الوجه ا س ب اما مساويا للوجه ب س ح (٢٣٩ ثانيا) أو أصغر منه (أولا) وكلاهما مخالف للفرض

دعوى نظـــــرية

(٢٤٣) مجموع الزوايا المستوية لاى زاوية مجسمة (ثلاثية كانت أو كثيرة الاوجه) أصغر من أربع قوائم (شكل ٢١٣)

ش ٢١٣

لذلك نقطع جميع أوجه المجسمة بمستو فيتشكل من خطوط تقاطعاته معها شكل كثير الاضلاع اب ح ء ه فاذا فرضت نقطة و داخله ووصل منها الى رؤسه بمستقيمات فانه يتكون حولها مثلثات متحدة فى العدد مع المثلثات المجتمعة فى نقطة س غير أن بعض زوايا مثلثات الجملة الاولى المرموز له بالحرف و مجتمع حول نقطة و وبعضها الآخر المرموز له بالحرف ا يتركب منه وجه واحد لكل واحدة من الزوايا المجسمة الثلاثية ا و ب و ح و ء و ه وكذا بعض زوايا الجملة الثانية المرموز له بالحرف س مجتمع حول نقطة س وبعضها الآخر ب مكمل لباقى أوجه المجسمات ا و ب و ح و ء و ه ولما كان مجموع الزوايا القائمة المشتمل عليه كل واحد من الجملتين واحدا يحدث و + ا = س + ب

وحيث ان المجموع ا أصغر من المجموع ب (٢٤١) يجب أن يكون المجموع و أكبر من المجموع س أعنى أن الزوايا المستوية المجتمعة فى نقطة س أقل من أربع قوائم

دعوى نظـــــريه

(٢٤٤) مجموع الزوايا الزوجية لاى زاوية مجسمة ثلاثية أكبر من قائمتين وأصغر من ست قوائم واذا أضيف قائمتان الى أصغر الزوايا الزوجية كان المجموع أكبر من مجموع الزاويتين الزوجيتين الباقيتين

أولا ـ اذا كان أَ و بَ و حَ رموزا للزوايا الزوجية للمجسمة الثلاثية المعلومة و أ و ب و ح رموز للزوايا المستوية للمجسمة الثلاثية المكملة للمجسمة المعلومة حدث

أَ = ٢ ق ـ أ ، بَ = ٢ ق ـ ب ، حَ = ٢ ق ـ ح أو

أَ + بَ + حَ = ٦ ق ـ (أ + ب + ح)

وحيث ان المجموع أ + ب + ح أكبر من صفر وأصغر من أربع قوائم (٢٤٣) فيكون أَ + بَ + حَ أصغر من ست قوائم وأكبر من قائمتين

ثانيا ـ اذا كانت أَ أصغر الزوايا الزوجية تكون أوجه المجسمة المكملة هي ٢ ق ـ أَ و ٢ ق ـ بَ ، ٢ ق ـ حَ ويكون الوجه ٢ ق ـ أَ هو أكبرها وعلى مقتضى ما تقدم (٢٤١) يحدث

٢ ق ـ أَ > ٢ ق ـ بَ + ٢ ق ـ حَ

وبضم أَ + بَ + حَ الى طرفي المتباينة وطرح قائمتين منهما يحدث

بَ + حَ > ٢ ق + أَ وهو المراد

دعوى نظـــــرية

* (٢٤٥) لامكان تشكيل زاوية مجسمة ثلاثية بثلاث زوايا مستوية معلومة يجب ويكفي أن
* يكون مجموعها أقل من أربع قوائم وأن تكون كبراها أصغر من مجموع الاثنتين الاخريين
* (شكل ٢١٤)
* قد علم مما سبق (٢٤٣) و (٢٤١) لزوم هذين الشرطين
* والآن نبرهن على كفاءتهما
* لتكن ب س ح ، أ س ب ، ى س ح الزوايا
* الثلاثة المعلومة فنفرض انها موضوعة في مستو واحد
* وأن الزاوية ب س ح هي الكبرى
* فنجعل نقطة س مركزا وبنصف قطر اختياري برسم
* محيط دائرة وينزل من النقطتين أ ، ى العمودين أأَ و ىىَ على الضلعين س ب ، س ح
* فمن حيث ان الزاوية ب س ح هي الكبرى فيكون القوس ب ح أكبر من كل واحد
* من القوسين أب ، ى ح ولكون القوس أب = القوس ب أَ يجب أن تقع نقطة أَ

* داخل القوس ب ح أي بين النقطتين ب و ح . ويمثل ذلك يعلم وقوع نقطة دَ بين
* النقطتين المذكورتين
* لكنه حيث كانت زاوية ب س ح < ا س ب + ح س د يجب أن يكون
* ب ح < اب + ح د وحيث كان أيضا ب اَ = ب ا ، ح دَ = ح د فلابد أن تقع
* نقطة اَ على يمين دَ
* وكذا حيث كان مجموع الزوايا الثلاثة المعلومة أقل من أربع قوائم فتكون نقطة د موضوعة
* بعد نقطة ح في الاتجاه اب ح على المحيط الذي يكون مبدؤه نقطة ا واذن فتوجد
* نقطة دَ بين النقطتين اَ و ا وتوجد نقطة اَ بين النقطتين دَ و د واذن فيتقاطع
* الوتران ا اَ و د دَ داخل محيط الدائرة
* اذا تقرر هذا يقام من نقطة و العمود وم على المستوى ب س ح ثم يرسم في المستوى
* ى وم محيط دائرة مركزه ى ونصف قطره اى فيقطع وم في نقطة م ثم يوصل
* م س فتتشكل من ذلك الزاوية المجسمة الثلاثية المعلومة
* لانه اذا وصل م ى و م ع فالمثلثان القائما الزاوية ا س ى و م ى س فيهما س ى
* مشترك بينهما والضلع اى = ى م واذن فيكونان متساويين وينتج من تساويهما ان
* زاوية ا س ى = زاوية ى س م ومثلهما المثلثان القائما الزاوية م س ع و د س ع
* لان فيهما س ع مشترك بينهما والضلع س د = س م لان كل واحد منهما مساو للضلع
* س ا فيكونان متساويين وينتج من تساويهما ان زاوية م س ع = د س ع

دعوى نظـــــرية

* (٢٤٦) يجب ويكفي لتشكيل زاوية مجسمة ثلاثية بثلاث زوايا زوجيــة معلومة ان يكون
* مجموعها محصورا بين قائمتين وست قوائم وانه لو اضيف قائمتان لاصغر هــذه الزوايا كان الناتج
* أكبر من مجموع الزاويتين الزوجيتين الاخريين
* قد سبقت البرهنة (بنمرة ٢٤٤) بضرورة لزوم هــذين الشرطين لتشكيل الزاوية المجسمة
* الثلاثية وأما الآن فلم تتكلم الالبيان كفاءتهما فنقول انه متى توفر هذان الشرطان فانه يمكن
* تشكيل المجسمة الثلاثيـــة المكملة للزاوية المجسمة المطلوبة بواسطة الاوجه ٢ ق — اَ
* و ٢ ق — بَ و ٢ ق — حَ واذن فيتيسر تشكيل الزاوية المجسمة الثلاثية بواسطة
* ثلاث زوايا زوجية

الفصل الثامن

تمرينات

١ - هل يتعين وضع مستو بجزء من منحنى معلوم

٢ - اذا أنزل من نقطة خارج مستو عمود عليه طوله ٣ متر ومائل طوله ٤ متر والمطلوب تعيين طول مسقط هذا المائل على المستوى

٣ - اذا فرضت نقطة متباعدة عن مستو ببعد ٨ متر ورکز فيها ورسم محيط دائرة على هذا المستوى وكان نصف قطره فيه ٦ متر والمطلوب تعيين بعد النقطة المذكورة عن أى نقطة من نقط محيط الدائرة

٤ - اذا رسمت دائرة فى مستو مسطحها ٢٠ مترا مربعا وفرضت نقطة خارجة عنه وعلى العمود القائم من مركز الدائرة وكانت متباعدة عن نقط محيطها ببعد ١٥ مترا والمطلوب تعيين بعدها عن مركز الدائرة

٥ - المطلوب تعيين محل النقط الفراغية المتساوية البعد عن نقطتين معلومتين

٦ - المطلوب تعيين فى الفراغ محل النقط المتساوية البعد عن ثلاث نقط معلومة ليست على استقامة واحدة

٧ - المطلوب تعيين فى مستو محل النقط المتساوية البعد عن نقطة خارجة عنه

٨ - المطلوب البرهنة على ان اجزاء المستقيمين المحصورة بين مستويات متوازية هى متناسبة

٩ - المطلوب البرهنة على انه اذا قطع مستو مستويين متوازيين تكون الزوايا الزوجية المتبادلة متساوية والمتناظرة كذلك والمجاورة للمستوى القاطع متكاملة

الباب الثانى

فى الكرة

تعاريف

(٢٤٧) الكرة هى جسم محاط بسطح منحن جميع نقطه على ابعاد متساوية من نقطة داخله تسمى مركزا ويسمى هذا السطح المنحنى بسطح الكرة

اذا تصورنا دوران نصف دائرة حول قطرها فانه يتولد من ذلك جسم الكرة وأما نصف المحيط فانه يتولد منه سطحها واذن فالكرة هى جسم تحركى وسطحها كذلك

(٢٤٨) كل مستقيم يمر بمركز الكرة وينتهى بنقطة من سطحها يسمى نصف قطر الكرة وأما اذا انتهى بنقطتين من سطحها فانه يسمى قطرا

وعلى مقتضى تعريف الكرة تكون أقطارها متساوية وانصاف أقطارها كذلك وكل كرتين متحدتين فى المركز وفى القطر يتحدان معا

اذا دارت كرة حول مركزها باى طريقة فان سطحها ينطبق دائما على نفسه وحينئذ فأى جزء من كرة يمكن انطباقه على أى جزء آخر منها أو من غيرها تكون متحدة مع الاولى فى المركز وفى نصف القطر

(٢٤٩) المستوى المماس لسطح الكرة هو الذى لا يشترك معه الا فى نقطة واحدة

الفصل الاول

فى القطع المستوى للكرة

دعوى نظرية

(٢٥٠) اذا قطعت الكرة بمستو فان القطع الحادث يكون دائرة (شكل ٢١٥)

ليكن هـ ح المستوى القاطع ، هـ م ح القطع الحادث فى الكرة فينزل من المركز و العمود و وَ على المستوى القاطع هـ ح ثم نصل نقطتى و ، وَ بكل واحدة من النقط ح ، م ، هـ ... الخ فمن حيث ان المستقيمات و ح ، و م ، و هـ ، الخ متساوية لكونها أنصاف أقطار فتكون ابعادها عن نقطة وَ موقع العمود متساوية

شكل ٢١٥

وبناء عليه تكون جميع نقط القطع على ابعاد متساوية من نقطة وَ وبذلك يكون محيط دائرة مركزه وَ

تنبيه — البرهان المتقدم لا يوافق الحالة التى يمر فيها المستوى القاطع بمركز الكرة غير انه يسهل مشاهدة ان جميع نقط هذا القطع على ابعاد متساوية من المركز وكل بعد منها مساو لنصف قطر الكرة واذن فيكون القطع دائرة لكنه حيث ان و وَ < و ح أمكن أن يسمى كل قطع مار بمركز الكرة بدائرة عظيمة وكل قطع لم يمر بمركزها بدائرة صغيرة

نتيجة ١ — اذا جعل س رمزا لنصف قطر الكرة و سَ رمزا لنصف قطر أى دائرة صغيرة و ى رمزا لبعد مستوى هذه الدائرة الصغيرة عن مركز الكرة تحصل $س^٢ = سَ^٢ + ى^٢$ وهو اشتراط يمكن أن يستنتج منه النظريتان الآتيتان

الاولى — فى كرة واحدة أو فى كرات متساوية الدوائر الصغيرة المتساوية ابعادها عن مركز الكرة متساوية وبالعكس

الثانية — فى كرة واحدة أو فى كرات متساوية أصغر الدوائر الصغيرة ما كان بعد مستويها عن مركز الكرة أطول وبالعكس

نتيجة ٢ — لا يمكن أن يقابل المستقيم سطح الكرة فى أكثر من نقطتين لانه لا يقابل الدائرة الحادثة من قطع الكرة بمستو مشتمل عليه فى أكثر من نقطتين

نتيجة ٣ — أى دائرتين عظيمتين فى كرة واحدة متساويتان ويتقاطعان فى قطر ينصف كل واحدة منهما

نتيجة ٤ — أى نقطتين مفروضتين على سطح الكرة لا يمكن أن يمر بهما الا قوس واحد من دائرة عظيمة وذلك لان مستوى الدائرة العظيمة يتعين بنقطتين من سطح الكرة وبمركزها

نتيجة ٥ — أى ثلاث نقط مفروضة على سطح الكرة لا يمكن أن يمر بها الا محيط دائرة واحد وذلك لان هذه النقط لما لم تكن على استقامة واحدة فلا يتعين بها الا مستو واحد وأما أى نقطتين فانه يمكن أن يمر بهما مقدار لانهائى من أقواس الدوائر الصغيرة

نتيجة ٦ — كل دائرة عظيمة تقسم الكرة الى قسمين متساويين

تعـــريف

(٢٥١) قطبا الدائرة هما نقطتا تقابل قطر الكرة العمودى على مستوى الدائرة بسطح الكرة فالنقطتان ا و ب (شكل ٢١٥) هما قطبا الدائرة هـ م ح

دعوى نظـــــرية

(٢٥٢) قطب أى دائرة على ابعاد متساوية من نقط محيطها (شكل ٢١٥)

لذلك نصل أحد القطبين ا أو ب الى جميع نقط محيط الدائرة صغيرة كانت أو عظيمة ثم يقال حيث ان جميع هذه المستقيمات هى موائل قد افترقت بابعاد متساوية عن موقع العمود او أو وب فتكون متساوية واذن تكون أقواس الدوائر العظيمة الموترة بها كذلك

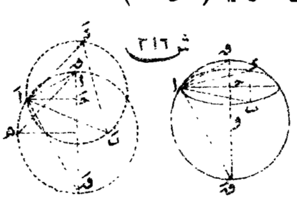
تنبيه — يطلق اسم نصف القطر الكروى للدائرة هـ م ح على قوس الدائرة العظيمة ا م وكل دائرة مرسومة على سطح الكرة مثل هـ م ح يمكن اعتبار تولدها من دوران نقطة م نهاية القوس ا م حول نقطة ا ولذا نعتبر نقطة ا كانها مركز الدائرة والقوس ا م نصف قطر لها واذن فلكل دائرة مرسومة على سطح الكرة مركزان على سطحها ونصفا قطرين كرويين متكاملان نصفا القطرين الكرويين لاى دائرة عظيمة يكونان متساويين ومقدار كل واحد منهما ربع محيط دائرة عظيمة

نتيجة — يمكن بواسطة برجل ذى فرعين غير متساويين مصنوع صناعة مناسبة رسم محيط دائرة على سطح الكرة مع السهولة التى بها يرسم المحيط المذكور على مستو انما اذا كانت الدائرة التى يراد رسمها عظيمة فان فتحة البرجل يجب ان تكون مساوية لضلع المربع المرسوم داخل دائرة نصف قطرها مساو نصف قطر الكرة

دعوى عمليـــــة

(٢٥٣) المطلوب تعيين نصف قطر كرة لا يمكن الدخول فيها (شكل ٢١٦)

نعتبر نقطة مّا و من سطح الكرة كأنها قطب ومنها نرسم محيط الدائرة ا ب ى ثم نتصور مد القطر و وَ العمودى على مستوى هذه الدائرة وليكن ح مركزها ثم نصل نقطة مّا من نقط المحيط ا الى النقط و و وَ و ح فاذا أمكن رسم المثلث و ا وَ القائم



الزاوية فانه يتوصل الى معرفة نصف القطر بواسطة أخذ نصف البعد و وَ وتصير المسئلة اذن محاولة

وللوصول الى ذلك نعين على محيط الدائرة النقط الثلاثة ا و ب و د وبواسطة قياس الاوتار اب و ب د و دا يرسم المثلث اَ بَ دَ مساويا للمثلث ا ب د ويرسم عليه محيط دائرة فيكون نصف قطره اَ حَ مساويا نصف القطر ا ح ثم يرسم بعد ذلك المثلث ح ا ن القائم الزاوية حيث يعلم منه الضلع ا ح والوتر ا ن ثم يقام من نقطة اَ عمود على الضلع ا ن ويمد حتى يتلاقى مع امتداد ن ح فيتعين بذلك ن نَ

نتيجة - متى تعين نصف قطر الكرة فانه يمكن أن يرسم به دائرة عظيمة على مستوى العمل وبذلك يمكن أن يتوصل الى مقدار طول ضلع المربع المرسوم داخلها الذى يحتاج اليه الامر عند ما يراد رسم دائرة عظيمة

دعوى نظـــــرية

(٢٥٤) المستوى العمودى على نهاية نصف قطر الكرة يكون مماسا لها وبالعكس (شكل ٢١٧)

أولا - ليكن م مستويا عموديا على نهاية نصف القطر و ا فمن حيث ان كل مستقيم مثل ب و يكون مائلا على المستوى م فيكون أطول من العمود وبذلك تكون نقطة ب خارجة عن سطح الكرة واذن فلا يشترك المستوى م مع سطحها الا فى نقطة ا

ثانيا - اذا كان م مستويا مماسا لسطح الكرة أى لا يشترك معها الا فى نقطة ا فكل مستقيم مثل و ب يكون أطول من البعد و ا لان نقطة ب خارجة عن سطح الكرة واذن فالمستقيم و ا أصغر جميع المستقيمات التى يمكن مدها من نقطة و الى المستوى م وبناء عليه فيكون عمودا على المستوى وهو المراد

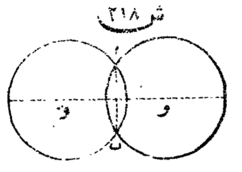
نتيجة - كل نقطة مفروضة على سطح الكرة لا يمكن أن يمر بها الا مستو واحد مماس لسطح الكرة

دعوى نظـــــرية

(٢٥٥) خط تقاطع سطحى كرتين هو محيط دائرة يكون مستويه عمودا على المستقيم الواصل بين مركزيهما وأما مركزه فهو موجود على المستقيم المذكور (شكل ٢١٨)

ليكونا و و وَ مركزى الكرتين فنتوهم مرور مستو ما بالمستقيم المار بالمركزين فيقطع الكرتين

فى دائرتى و و وَ المتقاطعتين ويكون فيهما الوتر المشترك اب عمودا على المستقيم الواصل بين المركزين ومنقسما به الى قسمين متساويين

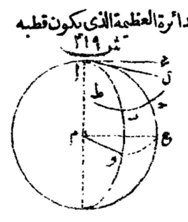


فاذا تصورنا الآن دوران الدائرتين حول و وَ فان سطحى الكرتين يتولدان من دوران المحيطين وأما الاوضاع المختلفة للمستقيم اب فانه يتولد منها مستو عمودى على و وَ وأما النقطتان المتطرفتان ا و ب فانهما يرسمان فى أثناء هذه الحركة محيط دائرة مركزه موجود على و وَ وهو المراد

تنبيه ـ جميع النظريات التى سبق ايرادها فى الباب الثانى من الجزء الاول بخصوص أوضاع الدوائر بالنسبة لبعضها يمكن تطبيقها هنا أيضا على الكرتين

دعوى نظـــــرية

(٢٥٦) الزاوية الواقعة بين قوسى دائرتين عظيمتين تقاس بقوس الدائرة العظيمة الذى يكون قطبه رأس الزاوية ونصف قطره ربع محيط دائرة عظيمة (شكل ٢١٩)



يطلق اسم الزاوية الواقعة بين قوسى دائرتين عظيمتين على الزاوية الزوجية الواقعة بين مستويهما وتقدم بنمرة (٢٢٤ نتيجة) ان الزاوية الزوجية تقاس بزاوية العمودين بفرض أن وحدة الزوايا الزوجية تقاس بزاوية العمودين التى مقدارها وحدة الزوايا المستوية

فاذا اعتبرنا رأس الزاوية ا قطبا ورسمنا محيط دائرة ع و بنصف قطر مساو ربع محيط دائرة عظيمة فان مستويه يكون عمودا على الحرف ا م للزاوية الزوجية الواقعة بين المستويين المارين بقوسى الدائرتين العظيمتين ويقطع هذين المستويين فى المستقيمين م ع و م و المتكون بينهما زاوية العمودين للزاوية الزوجية المذكورة وحيث ان هذه الزاوية المستوية تقاس بالقوس ع و المحصور بين ضلعيها تكون زاوية القوسين كذلك وهو المراد

تنبيه ـ ويمكن أيضا اعتبار زاوية المماسين اﻫ و ال المخرجين من نقطة ا ومماسين لقوسى الدائرتين العظيمتين مقاسا لزاوية القوسين المذكورين

الفصل الثانى

فى المثلثات وكثيرى الاضلاع الكروية

تعاريف

* (٢٥٧) المثلث الكروى هو جزء من سطح الكرة محصور بين ثلاث أقواس دوائر عظيمة
* يجب أن نعتبر دائما عند دراسة المثلثات الكروية أن يكون أى ضلع من أضلاعها أصغر من
* نصف محيط
* يتركب المثلث الكروى من ستة أجزاء ثلاثة أضلاع أَ و بَ و حَ وثلاث زوايا
* ا و ب و ح مقابلة لها
* (٢٥٨) كثير الاضلاع الكروى هو جزء من سطح الكرة محاط بجملة أقواس دوائر عظام
* متقاطعة مثنى ويقال له محدب متى كان موجودا بتمامه فى احدى نصفى الكرة المحددين
* بامتداد أحد أضلاعه
* أى ضلع من أى كثير أضلاع كروى محدب أصغر دائما من نصف محيط دائرة عظيمة لانه لو فرض
* أن أحد أضلاعه يزيد عن ذلك فانه لا يتأتى وجود الشكل بتمامه فى احدى نصفى الكرة
* المحددين بامتداد احد الضلعين المجاورين للضلع المذكور وبناء عليه لا يكون الشكل محدبا

دعوى نظرية

* (٢٥٩) كل كثير أضلاع كروى يقابله آخر مرسوم على سطح الكرة تكون أجزاؤه مساوية
* أجزاء الاول غير أنها موضوعة فى ترتيب مغاير لوضع ترتيبها فى الاول (شكل ٢٢٠)
* فاذا وصل بين المركز و وبين رؤس الشكل بمستقيمات
* ومدت على استقامتها من الجهة الاخرى حتى تلاقى سطح
* الكرة فانه يتشكل من ذلك كثير أضلاع كروى جديد اذا قورن
* بالشكل الاول نجد فيهما الاضلاع متساوية لانها مقاييس
* زوايا متساوية لتساوى الزوايا الزوجية المتقابلة بالحرف (٢٢٧
* ثالثة) غير انا نجد اختلافا فى ترتيب وضع الاضلاع والزوايا
* فيهما وهو أمر يسهل بيانه لانه من المعلوم اذا أريد ترتيب أجزاء أى كثير أضلاع كروى فانه

شكل ٢٢٠

يتبع السير على محيطه وعلى سطح الكرة بدون الدخول فيها متجها دائما نحو جهة معينة
ولتكن من الشمال الى اليمين مثلا ثم تمر أجزاءه على حسب ترتيب المرور عليها
اذا تقرر هذا واعتبرنا أن وضع النقط الثلاثة للمثلث ا ب ح هو طردى ظهر لنا أن النقط
المناظرة لها فى المثلث آ بَ حَ مغايرة لها فى الوضع لان الانتقال من نقطة ا الى ب يقتضى
الصعود فوق مستوى العمل بخلاف الانتقال من آ الى بَ فانه يقتضى الهبوط تحته
تنبيه ـ كل كثيرى أضلاع كرويين متماثلين لا يمكن انطباقهما على بعضهما لانه لو أمكن
ذلك للزم انطباق الاجزاء المتساوية المتحدة الاسم على بعضها وهذا يقتضى اتحادهما فى
ترتيب الوضع وهو مخالف للغرض

دعوى نظـــــريه

(٢٦٠) اذا أنشأنا مثلثا كرويا تكون رؤسه أقطابا للاضلاع مثلث كروى معلوم بحيث
يكون بعد كل واحد من هذه الاقطاب عن الرأس المقابل له من المثلث المفروض أقل من ربع
محيط دائرة عظيمة فانه يتكون ما يسمى بالمثلث القطبى للمثلث الاول ويحدث
أولا ـ ان المثلث المعلوم يكون مثلثا قطبيا للمثلث المنشا
(شكل ٢٢١)
ثانيا ـ ان كل زاوية من أحد المثلثين تكون مكملة
للضلع المناظر لها من المثلث الثانى
قبل البرهنة على هذه النظرية نذكر الفائدة الآتية

فائـــــــدة

كل نقطة مفروضة على سطح الكرة بين محيط دائرة عظيمة وقطبها أى موجودة معها فى نصف
كرة واحد يكون بعدها عن هذا القطب أقل من ربع محيط دائرة عظيمة وبالعكس اذا كان
البعد بين نقطتين على سطح الكرة أقل من ربع محيط دائرة عظيمة وكانت احداهما قطبا لمحيط
دائرة عظيمة تكون النقطتان المذكورتان موجودتين فى نصف كرة واحد من نصفيها المحددين
بمحيط الدائرة العظيمة المذكورة
ولا تحتاج هذه الفائدة الى البرهنة عليها لبداهتها لما هو معلوم من أن بعد قطب أى دائرة
عظيمة عن أى نقطة من نقطها هو ربع محيط دائرة عظيمة

* اذا تقرر هذا يقال اذا كان ا ب ح هو المثلث الكروى المعلوم فمن حيث ان قطب الضلع
* ب ح يجب أن يكون متباعدا عن كل واحدة من النقطتين ب و ح بمقدار ربع محيط
* دائرة عظيمة فيتعين اذن بواسطة أن يركز فى كل واحـدة من هاتين النقطتين وببعد مساو لربع
* محيط دائرة عظيمة يرسم قوسا محيطى دائرتين عظيمتين ءهـ و ءو يتقاطعان فى نقطتين
* نأخذ احداهما ء الموجودة فى جهة واحدة مع النقطة ا بالنسبة للقوس ب ح ثم اذا
* أجرى عمـل مشابه لذلك فى تعيين النقطتين هـ و و قطبى الضلعين اح و اب فانه
* يتشكل من ذلك المثلث القطبى ءهـو
* برهان الاول — يقال حيث ان نقطة ا متباعدة عن النقطتين و و هـ من قوس
* الدائرة العظيمة وهـ بمقدار ربع محيط دائرة عظيمة فتكون اذن قطبا للقوس وهـ وزيادة
* على ذلك حيث أن البعـد بين ا و ء أقل من ربع محيط دائرة عظيمة على مقتضى ماذكر
* بالفائدة وكانت ا قطبا للقوس هـو فتكون هى ونقطة ء فى نصف الكرة المحـدد
* بالقوس هـو واذن فيكون المثلث اب ح قطبا للمثلث ءهـو أعنى أن المثلث اب ح
* يمكن ايجاده من المثلث ءهـو بالطريقة التى استعملت لايجاده من المثلث اب ح
* برهان الثانى — يقال من المعلوم أن زاوية ا تقاس بالقوس حط وأن حط + هـو
* = (ح و — ط و) + (هـ ط + ط و) = ح و + هـ ط يساوى ربعى محيط دائرة عظيمة
* أى يساوى قائمتين وهو المراد
* تنبيه — يمكن مطابقة هذه النظرية مع التى تقدم ذكرها للزوايا المجسمة الثلاثية (٢٣٨)
* وذلك لانا لو وصلنا مركز الكرة م بجميع رؤس المثلثين فانا نتحصل على المجسمتين الثلاثيتين
* م اب ح و م ءهـو ونظرا لتعريف القطب يكون م ء عمودا على المستوى ب ح م
* وعلى مقتضى شرط انتخاب القطب ء يكون هو و نقطة ا فى جهة واحـدة بالنسبة
* للوجه ب ح م وحينئذ تكون المجسمة م ءهـو مكملة للمجسمة م اب ح ويمكن
* أن يقال من الآن على وجه العموم أن كل نظرية من نظريات المثلثات الكروية أو المضلعات
* الكروية يقابلها نظرية مطابقة لها على المجسمات الثلاثية أو على المجسمات كثيرة الاوجه

---

* دعوى نظـــــرية

* (٢٦١) اذا أنشأنا كثير أضلاع كروى تكون رؤسه أقطابا لكثير أضلاع كروى محدب
* بحيث يؤخذ كل واحد من هذه الاقطاب بالنسبة للضلع المقابل له فى نصف الكرة المشتمل على

* كثير الاضلاع المعلوم فانه ينشأ كل من ذلك مضلع كروى قطبى للمضلع الكروى المحدب المعلوم
* ويحدث
* أولا - ان كثير الاضلاع المعلوم يكون قطبيا لكثير الاضلاع المنشا (شكل ٢٢٢)
* ثانيا - ان زوايا احدهما تكون مكملة للاضلاع
* المناظرة لها من الثانى

ش ٢٢٢

* ليكن ا ب حـ ء هـ مضلعا كرويا محدبا معلوما
* ثم اعتبرنا نقطة اَ احدى قطبى القوس ب ا
* الموجودة معه فى نصف الكرة المحدد بامتداد القوس
* ا ب والموجود به النقط هـ و ء و حـ بمعنى ان
* بعد نقطة اَ عن كل واحدة من هذه النقط الثلاثة
* أقل من ربع محيط دائرة عظيمة واستمر بنا على هذا المنوال فى سائر الاقطاب بَ و حـَ
* و ءَ و هـَ فانه يتكون من ذلك المضلع القطبى اَ بَ حـَ ءَ هـَ بواسطة وصل هذه
* الاقطاب ببعضها باقواس دوائر عظام
* برهان الاول - يقال حيث ان نقطة ا مشتركة بين القوسين ا ب و ا هـ فيكون
* بعدها عن كل واحدة من النقطتين اَ و هـَ مساويا ربع محيط دائرة عظيمة وحينئذ
* فتكون قطبا لقوس الدائرة العظيمة اَ هـَ وزيادة على ذلك حيث ان بعد نقطة اَ
* عن كل واحدة من النقط هـ و ء و حـ أقل من ربع محيط دائرة عظيمة بناء على انتخاب
* الاقطاب اَ و بَ و حـَ و ءَ و هـَ فيكون كثير الاضلاع ا ب حـ ء هـ قطبيا
* لكثير الاضلاع اَ بَ حـَ ءَ هـَ بمعنى أن كثير الاضلاع ا ب حـ ء هـ يمكن ايجاده من كثير
* الاضلاع اَ بَ حـَ ءَ هـَ بالطريقة التى استعملت لايجاده من كثير الاضلاع ا ب حـ ء هـ
* برهان الثانى - يقال اذا مد القوس ا ب حتى يقابل القوسين اَ هـَ و اَ بَ فى
* النقطتين ط و ع فان الزاوية اَ تقاس بالقوس ع ا ب ط غير أن

* ا ب + ع ط = (ع ب - ع ا) + (ا ط + ا ع) = ع ب + ا ط

* تساوى ربعى محيط دائرة عظيمة أى تساوى قائمتين وهو المراد
* نتيجة - يتوصل بهذه النظرية الى طريقة تغيير شكل على سطح الكرة وأما الشكلان
* ا ب حـ ء هـ و اَ بَ حـَ ءَ هـَ فهما موجودان بحيث ان كل رأس من أحدهما يقابلها ضلع
* من الآخر وبالعكس وحينئذ فيمكن اعتبار تسمية أحد هذين الشكلين بالآيل القطبى للثانى

* تنبيه - وكان يمكن ايراد نظرية مقابلة لهذه فى الباب الاول من هذا الجزء على الزوايا
* المجسمة الكثيرة الاوجه لا تختلف عنها الا فى الصورة فقط

---

* ## دعوى نظرية

* (٢٦٢) كل مثلث كروى متساوى الساقين زاويتاه المقابلتان لساقيه متساويتان
* وبالعكس (شكل ٢٢٣)
* اذا كان الضلع ا ب = ا ح تكون زاوية
* ب = ح وبالعكس
* برهان الاول - نضع بجانب المثلث ا ب ح
* مماثله اَ حَ بَ ثم نطبقه عليه بأن نضع
* الزاوية اَ على مساويتها ا فتقع نقطة
* حَ على ب ونقطة بَ على ح وينطبق حينئذ بَ حَ على ح ب (٢٥٠ نتيجة ٤)
* وينطبق المثلثان على بعضهما وتكون زاوية بَ = ح وحيث كانت زاوية بَ = ب
* تكون زاوية ب = ح وهو المراد
* برهان الثانى - يقال أنه يسهل البرهنة على هذه النظرية بواسطة التطبيق غير أنه يمكن
* البرهنة عليها أيضا بواسطة الآيل القطبى فيقال اذا كان اَ بَ حَ هو المثلث القطبى للمثلث
* ا ب ح فمن حيث أن الزاويتين ب و ح متساويتان يكون الضلعان اَ بَ , اَ حَ
* من المثلث القطبى متساويين وعلى مقتضى الحالة الاولى من هذه النظرية تكون زاوية
* بَ = حَ وحيث أن هاتين الزاويتين متساويتان يكون الضلعان ا ح و ا ب من
* المثلث ا ب ح القطبى للمثلث اَ بَ حَ متساويين وهو المراد

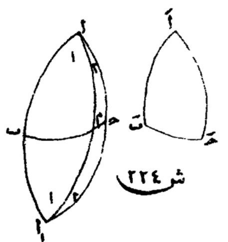
ش ٢٢٣

---

* ## دعوى نظريه

* (٢٦٣) يتساوى المثلثان الكرويان المرسومان على كرة واحدة أو على كرات متساوية اذا
* وجد فيهما واحد من الامور الآتية
* أولا - اذا ساوى من أحدهما زاوية والضلعان المحيطان بها النظائرها من الثانى
* ثانيا - اذا ساوى من أحدهما ضلع والزاويتان المجاورتان له لنظائرها من الثانى
* ثالثا - اذا تساوت فيهما الاضلاع الثلاثة المتناظرة
* رابعا - اذا تساوت فيهما الزوايا المتناظرة

* برهان الاول - يقال نطبق أحد المثلثين على الآخر كما أجرى ذلك بنمرة (٢٦٢) أولا
* برهان الثانى - يقال انه يمكن البرهنة على هذه النظرية بواسطة التطبيق غير أنه يمكن
* ترجيعها الى الحالة الاولى بواسطة الآيل القطبى فيقال اذا كان إ ب ح و أ َ بَ حَ المثلثين
* القطبيين للمثلثين ا ب ح و آ بَ حَ الاصليين فمن حيث انه يوجد فى أحد المثلثين الاصليين
* ضلع ومجاورتاه من الزوايا مساوية لنظائرها من الثانى يكون فى أحد المثلثين القطبيين لهما
* زاوية والضلعان المحيطان بها مساوية لنظائرها من المثلث القطبى الثانى وعلى مقتضى
* ماذكر فى الحالة الاولى يكون المثلثان القطبيان متساويين وينتج من تساويهما تساوى باقى
* الاجزاء فيهما أعنى أن الضلع والزاويتين المجاورتين له الباقية من المثلث القطبى الاول مساوية
* لنظائرها من الثانى وهذا يستلزم تساوى باقى الاجزاء فى المثلثين الاصليين وهو المطلوب
* برهان الثالث - يقال (شكل ٢٢٤) نضع المثلث آ بَ حَ تحت المثلث ا ب ح
* بحيث ينطبق الضلع بَ حَ على مساوية
* ب ح فيتكون من ذلك الشكل الرباعى
* ا ب إ ح ثم نصل بين ا و إ بقوس دائرة
* عظيمة فالمثلث ا ح إ فيه الضلعان ا ح
* و ح إ متساويان لان كل واحد منهما
* يساوى الضلع آ حَ فتكون الزاويتان
* ح ا إ و ا إ ح متساويتين وكذا ينتج من



ش ٢٢٤

* المثلث ا ب إ ان زاوية م ا ب = م إ ب واذن فتكون زاوية ح ا ب = ح إ ب
* لانهما مجموع زاويتين متساويتين (وقد يتأتى أن يكونا فاصل زاويتين متساويتين)
* وبناء عليه يكون فى أحد المثلثين زاوية والضلعان المحيطان بها مساوية لنظائرها من الثانى
* فيكونان متساويين (أولا)
* برهان الرابع - يقال انه يتوصل الى اثبات هذه النظرية بواسطة الآيل القطبى وذلك لانه
* حيث كانت الزوايا متساوية فى المثلثين ا ب ح و آ بَ حَ المعلومين فتكون أضلاع
* مثلثيهما القطبيين متساوية على التناظر وعلى مقتضى الحالة الثالثة تكون زواياهما متساوية
* غير أن تساوى الزوايا المتناظرة من المثلثين القطبيين يستلزم تساوى الاضلاع المتناظرة
* فى المثلثين الاصليين واذن فقد رجع الامر الى الحالة السابقة
* تنبيه ١ - اذا لم تكن الاجزاء المتساوية فى المثلثين موضوعة على ترتيب واحد فيهما فى أى

* حالة من هذه الاحوال فيكون المثلثان المفروضان متماثلين وحينئذ فتجرى البرهنة على
* أحدهما وعلى المماثل للثانى
* تنبيه ٢ — الاحوال الثلاثة الاول من هذه النظرية تشترك فيها المثلثات المستقيمة
* الاضلاع دون الحالة الرابعة لكنا لو أمعنا النظر وكما لم تحصل من تساوى الزوايا فى المثلثات
* الكروية غير تناسب الاضلاع كما فى المثلثات المستقيمة الاضلاع ثم لاحظنا ان نسبة الاقواس
* المتشابهة الى بعضها كنسبة انصاف أقطار دوائرها رأينا ان تناسب الاضلاع يقتضى
* تساويها لتساوى انصاف أقطار دوائرها حيث اناقيدنا تساوى المثلثات الكروية بانها تكون
* مرسومة على كرة واحدة أو على كرات متساوية فلهذا كان تساوى الزوايا فى المثلثات الكروية
* قاضيا بتساوى أضلاعها

---

* دعوى نظـــــرية

* (٢٦٤) الزاوية الخارجة من أى مثلث كروى أكبر من كل واحدة على حدتها من الزاويتين
* الداخلتين من المثلث الا المجاورة لها (شكل ٢٢٥)
* ليكن المطلوب البرهنة على أن زاوية ا حـ ء أكبر من ا
* لذلك نصل بين نقطة ب ومنتصف ا حـ بقوس الدائرة
* العظمية ب هـ ثم نمده ونأخذ منه القوس هـ و يساوى
* هـ ب ونصل قوس الدائرة العظمية و حـ الذى يقسم الزاوية
* ا حـ ء الى قسمين

ش ٢٢٥

* فاذا قورن المثلثان هـ و حـ , ا هـ ب نجدهما متماثلين لتساوى ضلعين والزاوية المحصورة
* بينهما من أحدهما الضلعين والزاوية المحصورة بينهما من الثانى مع اختلافهما فى ترتيب الوضع
* وبناء على ما تقدم يتساوى فيهما باقى الاجزاء وتكون زاوية هـ حـ و = ا واذن تكون
* زاوية ا حـ ء > ا وهو المطلوب
* تنبيه — كان يمكن ايراد ما يقابل هذه النظرية فى الباب الاول من هذا الجزء

---

* دعوى نظـــــرية

* (٢٦٥) الضلع الاكبر من أى مثلث كروى تقابله الزاوية الكبرى وبالعكس (شكل ٢٢٦)
* أولا — ليكن الضلع ا حـ < ا ب ويطلب البرهنة على ان زاوية ب > حـ

* لذلك يؤخذ من الضلع الاكبر ا ح الجزء ا ء = ا ب ثم نصل قوس الدائرة العظمة ب ء
* فتكون زاوية ا ء ب = زاوية ا ب ء وحيث كانت
* زاوية ا ء ب خارجة عن المثلث ح ء ب فتكون أكبر من
* زاوية ح ومن باب أولى تكون زاوية ا ب ح > ح
* ثانيا — لتكن زاوية ب > ح ويطلب البرهنة على ان
* ا ح > ا ب
* وذلك لانه ان لم يكن ا ح أكبر من ا ب لكان مساويا له أو أصغر منه واذن تكون زاوية
* ب مساوية أو أصغر من زاوية ح وهما نا تجان مغايران للفرض فيكون ا ح > ا ب
* وهو المطلوب

---

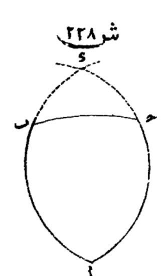
* دعوى نظـــــرية

* (٢٦٦) أى ضلع من أى مثلث كروى أصغر من مجموع الضلعين الآخرين (شكل ٢٢٧)
* يكفى ان نبرهن على ان الضلع الاكبر ب ح أصغر من مجموع
* الاثنين الآخرين
* لذلك يمد الضلع ا ح ويؤخذ عليه المقدار ا ء = ا ب
* ثم يوصل قوس الدائرة العظمة ب ء فالمثلث الحادث ا ب ء
* يكون متساوى الساقين وتكون فيه زاوية ء = زاوية
* ا ب ء واذن فتكون أصغر من زاوية ء ب ح وبناء على
* ما تقدم (بنمرة ٢٦٥) يكون الضلع ب ح أصغر من الضلع ح ا ء من المثلث ء ح ب
* أو أصغر من ح ا + ا ء أو من ح ا + ا ب وهو المراد
* نتيجـــة — ومما ذكر ينتج ان أى ضلع من المثلث الكروى أكبر من الفرق بين الضلعــين
* الآخرين

---

* دعوى نظـــــرية

* (٢٦٧) مجموع أضلاع أى مثلث كروى أصغر من محيط دائرة عظمة (شكل ٢٢٨)
* اذا كان ا ب ح المثلث المعلوم فانا نمد الضلعين ا ح و ا ب الى أن يتلاقيا فى
* نقطة ء وبذلك يكون كل واحد من القوس ا ب ء و ا ح ء نصف محيط دائرة عظمة



* لكن ا ب + ا ح + ب ح < ا ب + ا ح
* + ب ء + ء ح (٢٦٦) أو ا ب + ا ح
* + ب ح < ا ب ء + ا ح ء أو < محيط
* دائرة عظيمة
* تنبيه ـ هذه النظرية والتي بعدها تقابلهما نظرية
* (نمرة ٢٤٣)

---

* دعوى نظـــــرية

* (٢٦٨) مجموع أضلاع أي مضلع كروي أقل من محيط دائرة عظيمة (شكل ٢٢٩)
* لذلك نمد الضلعان ا هـ , ح ء الحاصران بينهما
* الضلع ء هـ حتى يتلاقيا فنتوصل الى مضلع كروي
* ينقص رأسا عن الاول غير أن محيطه أطول من محيط
* المضلع الاول وباعادة هـذه العملية مرارا فاننا نتوصل
* أخـيرا الى مثلث كروي محيطه أطول بكثـير من محيط
* المضلع المعلوم
* نتيجـة ـ نهاية طول محيط أي مضلع كروي محدب
* هو محيط الدائرة العظيمة المستعمل قاعدة لنصف الكرة المرسوم عليها هذا المضلع

---

* دعوى نظـــــرية

* (٢٦٩) مجموع زوايا أي مثلث كروي أكبر من قائمتـين وأصغر من ست قوائم واذا اضيف
* لاصغرها قائمتان كان الناتج أكبر من مجموع الزاويتين الآخرتين
* اذا دلت الحروف ا , ب , ح على زوايا المثلث الثلاثة مرتبة على حسب ترتيب مقاديرها
* التصاعدية واعتبرنا المثلث القطبي له وكانت أضلاعه اَ , بَ , حَ مرتبة على حسب
* ترتيب مقاديرها التنازلية لانها مكملة للزوايا ا , ب , ح حدث
* أولا ـ حيث ان كل واحـدة من الزوايا ا , ب , ح أقل من قائمتين يكون مجموعها
* أقل من ست قوائم وقد تقدم (٢٦٧) ان

* آ + بَ + حَ > ٤ق أو ٢ق − ا + ٢ق − ب + ٢ق − ح > ٤ق
* أو ا + ب + ح < ٢ق
* ثانيا — من المعلوم ان آ > بَ + حَ (٢٦٦) فيكون
* ٢ق − ا > ٢ق − ب + ٢ق − ح أو ا + ٢ق < ب + ح وهو المراد
* نتيجة — ينتج مما ذكر أن المثلث الكروى يمكن أن يكون فيه زاويتان قائمتان أو منفرجتان
* أو ثلاث زوايا قوائم أو منفرجة
* فى حالة ما يكون الزاويتان ب و ح قائمتين فى المثلث الكروى تكون الرأس ا قطبا
* للقاعدة ب ح ويكون مقدار كل ضلع من ضلعى المثلث المحاطين بزاوية الرأس ا ربع
* محيط دائرة عظيمة
* وأما فى حالة ما تكون الزوايا الثلاثة قائمة فان مقدار كل ضلع من اضلاعه يساوى ربع محيط
* دائرة عظيمة ويقال لهذا المثلث قائم الزوايا الثلاثة
* اذا تصورنا تمر بمحيط دائرة ما عظيمة وفرضنا ان ق و قَ قطباها ثم مررنا بالمستقيم المار
* بهما مستويين متعامدين فان هذه المستويات الثلاثة المتعامدة تقسم سطح الكرة الى ثمانية
* مثلثات كروية قائمة الزوايا الثلاثة وجميعها متساوية لتساوى أضلاعها ببعضها واذن
* فالمثلث الكروى القائم الزوايا الثلاثة يعادل ثمن الكرة التى هو جزء منها
* تنبيه — يمكن بواسطة نظرية (نمرة ٢٦٨) استخراج نظرية أخرى تتعلق بمجموع زوايا
* المضلع الكروى بواسطة الآيل القطبى

---

* دعوى نظرية

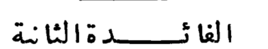
* (٢٧٠) قوس الدائرة العظيمة الذى مقداره دون نصف محيط الواصل بين نقطتين على سطح
* الكرة هو أقصر طريق بين هاتين النقطتين على سطحها
* والبرهنة على هذه النظرية مؤسسة على الفائدتين الآتيتين

---

* الفائدة الاولى

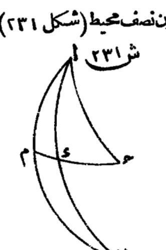
* البعد الاصغر بين قطب أى دائرة وبين جميع نقط محيطها واحد (شكل ٢٣٠)
* اذا كان ق قطبا المحيط الدائرة ا ب ى ووصل بينه وبين كل واحدة من النقطتين ا و ب
* بقوس دائرة عظيمة وفرض ان ق ح ب هو أصغر بعد بين القطب ق وبين نقطة ب

وتصورنادوران نصف الكرة الموجود على يمين الدائرة العظمية ى ب ىَ حول القطر ى ىَ
حتى تنطبق هـذه الدائرة على الدائرة ى ا ىَ فان
قوس الدائرة العظمية ى ب ينطبق على مساويه ى ا
وينطبق نصف الكرة ى ب ىَ انطباقا تاما على
نصف الكرة ى ا ىَ ب هـ ولما كان الخط ى ج ب
لايزال عند الانطباق دالاعلى أقصر بعد بين ى و ب
فيكون اذن هو أقصر بعد بين ى و ا



الفائـــــدة الثانية

اذا كان كل واحد من قوسى الدائرتين العظمتين ا ب و ا ح دون نصف محيط (شكل ٢٣١)
وفرض ان ا ح < ا ب فأقول ان البعـد الاصغر
بين النقطتين ا و ح أقل من البعـد الاصغر بين
النقطتين ا و ب



وللبرهنة على ذلك نعتبر نقطة ا قطبا ونرسم منها محيط
دائرة بنصف قطر مساو ا ح فتكون هـذه الدائرة
قاطعة ضرورة للقوس ا ب فى نقطة بين ا و ب
ثم اذا اعتـبر القوس ا م ب انه أصـغر طريق بين
النقطتين ا و ب فانه يقطع المحيط ح ى فى نقطة م ويكون ا م أصـغر طريق
بين النقطتين ا و م لانه ان لم يكن كذلك ووجد أقصر منه فلايكون ا م ب أقصر طريق
بين ا و ب وهو مخالف للفرض وحيث ان أقصر طريق بين ا و م مساو لاقصر طريق
بين ا و ح كما تقدم فى الفائدة الاولى يكون أقصر طريق بين ا و ح اذن هو أقل من
أقصر طريق بين ا و ب
اذا تقرر هذا يقال (شكل ٢٣٢) ليكن ا ب قوسا من محيط
دائرة عظمية دون نصف محيط واصلا بين النقطتين ا و ب
فاذا فرض ان نقطة ح الخارجة عن القوس ا ى ب احدى
نقط البعد الاصغر بين نقطتى ا و ب ووصل قوسا الدائرتين
العظمتين ا ح و ح ب وأخذ ا ى يساوى ا ح فعلى مقتضى ماذكر (بنمرة ٢٦٦)

* يكون اب < اح + حب ثم اذا طرح من طرفى هذه المتباينة اء ، اح المتساويان
* يحدث ءب < بح
* لكنه حيث ان أقصر طريق بين ا ، ح مساو لاقصر طريق بين ا ، ء بناء على ما تقرر
* فى الفائدة الاولى وكانت ح احدى نقط اقصر طريق بين ا ، ب فيكون القوس حب
* أصغر من اقصر طريق بين ء ، ب وهو ناتج مستحيل بناء على ما تقرر فى الفائدة الثانية حيث
* قد ثبت ان بح أكبر من بء وحينئذ فلا يمكن وجود نقطة من نقط أقصر طريق
* بين ا ، ب خارجة عن القوس المذكور واذن فيكون هو عين القوس اب
* تنبيه — قد فرض فى البرهان السابق ان كل واحد من القوسين اح ، حب دون اب
* حيث لا يمكن أن يفرض خلاف ذلك لانه لو فرض ان اح > اب فان أقصر طريق بين
* ا ، ب يكون أقل من أقصر طريق بين ا ، ح واذن فلا يمكن أن تكون نقطة ح
* موجودة على الخط الاول

الفصل الثالث

فى مسائح المثلثات والمضلعات الكروية

تعاريف

* (٢٧١) حيث انه يمكن تطبيق أى جزء من سطح الكرة على أى جزء آخر منها كان من
* الممكن أيضا مقارنة أى جزأين منها ولما كان المثلث الكروى القائم الزوايا الثلاثة ثابت
* المقدار بالنسبة لسطح الكرة (٢٦٩) فنعتبره اذن وحدة للسطوح الكروية
* ومن المعلوم أنه لا يمكن مقارنة مساحة أى جزء من سطح الكرة بمساحة المتر المربع لان المستوى
* مهما كان صغره لا يمكن تطبيقه على سطح الكرة غير أنا نتكلم فى الجزء الرابع كيف يمكن اجراء
* تلك المقارنة
* (٢٧٢) الشقة هى جزء من سطح الكرة محصورة بين نصفى محيطى دائرتين عظميين وزاوية
* الشقة هى زاوية القوسين المحددين لها

دعوى نظــــــرية

* (٢٧٣) النسبة بين أى شقتين كالنسبة بين زاويتيهما
* وللبرهنة على ذلك يقال
* أولا — ان الشقتين المتساويتين زاويتاهما كذلك وبالعكس
* وذلك لان تساوى الشقتين يقتضى انطباقهما على بعضهما وبذلك تنطبق زاوية احداهما
* على زاوية الاخرى وأما اذا كان الزاويتان متساويتين فان زوجيتى الشقتين تكونان
* متساويتين وبذلك تنطبق الشقتان على بعضهما
* ثانيا — اذا كان الشقتان متناسبتين وفرض ان النسبة بينهما كالنسبة بين العددين ٥ ، ٣
* مثلا ثم قسمت الشقة الاولى الى خمسة شقات متساوية والثانية الى ثلاثة متساوية وكل
* واحدة منها مساوية لكل شقة من الشقات الخمس الاولى فان زاويتيهما الزوجيتين
* أو المستويتين تصير منقسمة الى زوايا متساوية الاولى الى خمسة والثانية الى ثلاثة وبناء عليه
* يتحصل هذا التناسب

$$\frac{\text{شقة ا}}{\text{شقة ب}} = \frac{\text{زاوية ا}}{\text{زاوية ب}}$$

* بفرض ان ا و ب يدلان على زاويتى الشقتين
* ثالثا — اذا كان الشقتان غير متناسبتين فانه يبرهن بمثل ما تقدم (بنمرة ٨٠ جزء أول)
* على ان النسبة بينهما هى كالنسبة بين زاويتيهما وهو المراد
* نتيجة ١ — اذا فرضنا ان الشقة ب هى الشقة القائمة المقابلة للزاوية القائمة وحدة
* الزوايا المستوية أمكن أن يعبر عن هذا التناسب بان الشقة تقاس بزاويتها
* نتيجة ٢ — وأما اذا اعتبرنا المثلث الكروى القائم الزوايا الثلاثة وحدة للسطوح
* الكروية فمن حيث انه يساوى نصف الشقة القائمة أمكن وضع التناسب السابق على هذه
* الصورة بفرض ان م تدل على المثلث الكروى المذكور

$$\frac{\text{شقة ا}}{\text{٢ م}} = \frac{\text{زاوية ا}}{\text{زاوية قائمة}} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{شقة ا}}{\text{م}} = \frac{\text{٢ زاوية ا}}{\text{قائمة}}$$

* أعنى ان الشقة تقاس فى هذه الحالة بضعف زاويتها
* هذا ولابد من أن تتذكر دائما فى المقدار الاول أن الشقة منسوبة للشقة القائمة وان زاويتها

* منسوبة للزاوية القائمة وأما فى المقدار الاخير فان الشفقة منسوبة للمثلث الكروى القائم
* الزوايا الثلاث وزاويتها منسوبة للزاوية القائمة

---

* دعوى نظـــــرية

* (٢٧٤) المثلثان الكرويان المتماثلان متكافئان (شكل ٢٢٠)
* ليكونا ا ب ح , اَ بَ حَ مثلثين كرويين متماثلين و ى قطب المثلث الاول فنصل
* بينه وبين مركز الكرة و بمستقيم ونمده حتى يقابل سطح الكرة فى نقطة ىَ ومن حيث
* ان ى هى قطب للمثلث ا ب ح أى انها على أبعاد متساوية من النقط ا , ب و ح
* تكون ىَ قطبا للمثلث اَ بَ حَ أى على أبعاد متساوية من النقط اَ , بَ و حَ
* وذلك لان ىَ اَ = ى ا , ىَ بَ = ى ب , ىَ حَ = ى ح
* ويشاهد غير ذلك ان ى و ىَ يوجدان اما داخل المثلثين ا ب ح , اَ بَ حَ أو خارجهما
* فى آن واحد
* اذا تقرر هذا يقال ان المثلث اَ بَ حَ منقسم الى ثلاثة مثلثات متساوية الساقين ومساوية
* الى المثلثات الثلاثة المنقسم اليها المثلث ا ب ح واذن فيكون المثلث اَ بَ حَ مكافئا
* للمثلث ا ب ح وهو المراد

---

* فائـــــدة

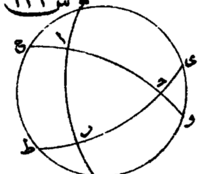
* (٢٧٥) اذا تقاطع قوسا دائرتين عظيمتين على نصف كرة فان مجموع المثلثين الكرويين الحادثين
* من ذلك يكافئ شفة الزاوية التى يتقاطع فيها قوسا الدائرتين العظيمتين (شكل ٢٢٢)
* ليكن ا ب اَ , ح ب حَ قوسى دائرتين عظيمتين متقاطعين فى نقطة ب على نصف الكرة
* ا ح اَ حَ فالمثلث ا ب ح يكافئ المثلث اَ بَ حَ المماثل له غير ان اَ بَ حَ + اَ ب حَ =
* شقة ب فيكون ا ب ح + اَ ب حَ = شقة ب وهو المراد

---

* دعوى نظـــــرية

* (٢٧٦) مساحة المثلث الكروى تساوى الفرق بين مجموع زواياه وقائمتين (بفرض أن
* المثلث الكروى القائم الزوايا الثلاثة وحدة للسطوح الكروية والزاوية القائمة وحدة للزوايا
* المستوية) (شكل ٢٢٣)

* لیکن ى ى ع محيط الدائرة العظيمة المعتبر قاعدة لنصف الكرة المشتمل على المثلث حيث
* يفرض دائما وجود المثلث على نصف كرة واحـدة فاذا امدت أضـلاع المثلث ب ح , ح ا
* و ا ب حتى تلاقى محيط القاعدة فيحصل على مقتضى
* الفائدة السابقة ان



* ا ب ح + ب ح و ى + ع ا ھ = شقة ا ,
* ا ب ح + ا ب ط ع + ى ح و = شقة ح ,
* ا ب ح + ا ح ى ھ + ى ب ط = شقة ب
* وبجمع هذه المتساويات على بعضها يحدث
* ٢ ا ب ح + نصف كرة = شقة ا + شقة ح + شقة ب أو

* $$ا ب ح = \frac{\text{شقة ا + شقة ح + شقة ب − نصف كرة}}{٢}$$

* غير انا اذا نسبنا تلك السطوح الى المثلث الكروى القائم الزوايا الثلاثة يحدث

* $$\frac{ا ب ح}{م} = \frac{\text{شقة ا + شقة ح + شقة ب − نصف كرة}}{\text{الشقة القائمة}}$$ لكن

* $$\frac{\text{شقة ا}}{\text{الشقة القائمة}} = \frac{\text{زاوية ا}}{\text{قائمة}} \ , \ \frac{\text{شقة ح}}{\text{الشقة القائمة}} = \frac{\text{زاوية ح}}{\text{قائمة}} \ ,$$

* $$\frac{\text{شقة ب}}{\text{الشقة القائمة}} = \frac{\text{زاوية ب}}{\text{قائمة}} \ , \ \frac{\text{نصف كرة}}{\text{الشقة القائمة}} = \frac{\text{٢ قائمة}}{\text{قائمة}}$$

* فيحدث

* $$\frac{ا ب ح}{م} = \frac{ا + ب + ح − ٢ ق}{\text{قائمة}}$$ أو ا ب ح = ا + ب + ح − ٢ ق وهو المطلوب

* مثال ـ اذا كانت ا = ١٠َ ٧٠ْ و ب = ٢٠َ ٦٠ْ و ح = ٨٠ْ فيكون ا + ب
* + ح − ٢ ق = ٣٠َ ٣٠ْ واذن يكون

* $$\frac{ا ب ح}{م} = \frac{٣٠ْ\ ٣٠َ}{٩٠ْ} = \frac{١٨٣٠َ}{٥٤٠٠َ} = \frac{١}{٣}$$ تقريبا أو $$ا ب ح = \frac{م}{٣}$$

* وحيث ان م = $\frac{١}{٨}$ سطح الكرة فيكون ا ب ح مساويا الى $\frac{١}{٢٤}$ من سطح الكرة

دعوى نظـــــرية

* (٢٧٧) مساحة أى كثير أضلاع كروى تساوى الفرق بين مجموع زواياه وبين قوائم عددها
* بقدر عدد أضلاعه ناقصا اثنين مضروبا فى اثنين (شكل ٢٣٤)
* ليكن ا ب ح ء ه شكلا كثير الاضلاع كرويا معلوما فاذا
* مررنا بنقطة ا وبكل واحدة من النقطتين ء و ح قوس
* دائرة عظيمة فان الشكل ينقسم الى مثلثات كروية عددها
* مساو لعدد أضلاعه ناقصا اثنين وحيث ان مجموع زوايا المثلثات
* مساو لمجموع زوايا الشكل فتكون مساحة المضلع منسوبة
* الى المثلث الكروى القائم الزوايا الثلاث مساوية مجموع زواياه ناقصا من القوائم بقدر ضعف
* عدد أضلاعه الاربعة وهو المراد

* نتيجة ١ - اذا رمزنا بالحرف س لسطح المضلع الكروى وبالرموز ا و ب و ح ... الخ
* لزواياه وبالرمز ن لعدد أضلاعه تحصل
* س = ا + ب + ح + ... الخ - ٢ (ن - ٢) = ا + ب + ح + ... الخ - ٢ ن + ٤
* نتيجة ٢ - اذا كان الشكل المعلوم مربعا كرويا وكان ا رمزا الاحد رؤسه حدث
* س = ٤ ا - ٤ ومنه ا = ١ + $\frac{س}{٤}$
* ومن هنا يشاهد ان زاوية المربع الكروى تزيد عن القائمة

---

* الفصـــــل الرابـــــع

* فى الاقواس المتعامـــــدة

---

* دعوى نظـــــرية

* (٢٧٨) أى نقطة مفروضة خارج دائرة عظيمة يمكن أن يمر بها قوس دائرة عظيمة واحد
* عمودى على الاول لا اثنان (شكل ٢٣٥)
* ليكن ب ح قوس الدائرة العظيمة المعلوم و ا النقطة المفروضة خارجة عنه

* برهان الأول — يقام من مركز الكرة و عمود على مستوى الدائرة العظمية ب ح ويمر به
* وبنقطة ا مستو يقطع الكرة فى الدائرة العظيمة ا ء
* العمودية على الدائرة العظيمة ب ح وبذلك قد أمكن انزال
* قوس دائرة عظيمة عمودى على قوس الدائرة العظيمة ب ح
* المفروض من نقطة ا
* برهان الثانى — يقال ان مستوى الدائرة العظيمة العمودى
* على الدائرة ب ح يجب أن يشتمل أولا على القطر العمودى
* على ب ح وثانيا على نقطة ا وحيث انه لايتأتى الامرار مستو واحد بهذا المستقيم
* وبهذه النقطة فقد ثبت المطلوب
* تنبيه — ماذكرنا من البرهنة هو بفرض ان نقطة ا ليست قطبا للقوس ب ح

شكل ٢٣٦

---

* دعوى نظرية

* (٢٧٩) اذا مد من نقطة خارج قوس دائرة عظيمة قوس دائرة عظيمة عمودى عليه وعدة
* أقواس دوائر عظيمة مائلة فانه يحدث
* أولا — ان العمود أقصر من كل مائل
* ثانيا — المائلان اللذان افترقا عن موقع العمود ببعدين متساويين متساويان
* ثالثا — المائلان اللذان افترقا عن موقع العمود ببعدين
* مختلفين أبعدهما أطول
* يسهل البرهنة على هذه النظريات وعلى عكسها أيضا

---

* دعوى نظرية

* (٢٨٠) كل نقطة من نقط قوس الدائرة العظيمة العمودى على وسط قوس دائرة عظيمة آخر
* على بعدين متساويين من نهايتى هذا القوس الاخير وكل نقطة خارجة عنه فهى على بعدين
* مختلفين منهما
* وهذه نظرية يسهل البرهنة عليها وعلى عكسها أيضا
* نتيجة — مستوى قوس الدائرة العظيمة المار عموديا على وسط قوس الدائرة العظيمة الثانى
* يكون عمودا على وسط وتر هذا القوس الاخير وذلك لان خط تقاطع مستويى القوسين

* المذكورين ينصف هذا الوتر ويكون عمودا عليه . وكذا يكون المستوى العمودى المذكور
* محل النقط الفراغية المتساوية البعد عن نهايتى هذا الوتر

دعوى نظرية

* (٢٨١) يتساوى المثلثان الكرويان القائما الزاوية اذا وجد فيهما واحد من الشرطين
* الآتيين
* أولا — اذا ساوى من أحدهما وتر وضلع لنظيريهما من الثانى
* ثانيا — اذا ساوى من أحدهما وتر وزاوية مجاورة له لنظيريهما من الثانى والبرهنة عليهما
* سهلة
* تنبيه — اذا لم تكن الاجزاء المتساوية فى المثلثين موضوعة على ترتيب واحد كانا متماثلين

* الفصل الخامس

* فى الدوائر الصغيرة

* (٢٨٢) يتضح مما تقدم من النظريات أن قوس الدائرة العظيمة على الكرة هو بمثابة
* المستقيم على المستوى وأن قوس الدائرة الصغيرة عليها هو بمثابة قوس الدائرة عليه غير أن
* للدائرة الصغيرة مركزين ونصفى قطرين وانه اذا وصل بين نقطتين من قوس دائرة صغيرة
* بقوس من دائرة عظيمة فانه يكون وترا لقوس الدائرة الصغيرة
* ولنكتف هنا بذكر منطوق بعض نظريات مشابهة لما تقدم ذكرها فى الباب الثانى من الجزء
* الاول دون البرهنة عليها لسهولتها فنقول
* الاولى — قوس أى دائرة عظيمة لا يقابل أى دائرة صغيرة فى أكثر من نقطتين
* الثانية — القطر يقسم الدائرة الصغيرة الى قسمين متساويين
* الثالثة — كل وتر أصغر من القطر
* الرابعة — فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية الاقواس المتساوية أوتارها كذلك
* وبالعكس
* الخامسة — فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية القوس الاكبر يقابله الوتر الاكبر وبالعكس
* السادسة — قطب أى قوس ونصف وتره ونصفه توجد فى مستوى دائرة عظيمة عمودى
* على الوتر

* السابعة ـ فى دائرة صغيرة واحدة أو فى دوائر صغيرة متساوية الاوتار المتساوية ابعادها عن
* المركز متساوية
* الثامنة ـ فى دائرة صغيرة واحدة أو فى دوائر صغيرة متساوية الوتران المختلفان أقربهما
* من المركز أطول وبالعكس
* التاسعة ـ قوس الدائرة العظيمة العمودى على نهاية نصف قطر دائرة صغيرة يكون مماسا
* لمحيطها

دعوى نظـــــرية

* (٢٨٣) اذا اشترك محيطا دائرتين صغيرتين فى نقطة خارجة عن الخط الواصل بين مركزيهما
* فانه لابد أن يكون لهما نقطة أخرى مشتركة مماثلة للاولى بالنسبة للخط الواصل بين المركزين
* (شكل ٢٣٦)
* ليكونا ح و ك مركزى الدائرتين و ح ب ك
* قوس الدائرة العظيمة الواصل بينهما و ا النقطة
* المشتركة بين المحيطين خارج ح ب ك فانه ينزل من
* هذه النقطة قوس الدائرة العظيمة ا ب عمودا على
* ح ب ك ثم يمد ويؤخذ عليه البعد ب اَ = ب ا فتكون نقطة اَ مماثلة لنقطة ا
* ثم يوصل ح ا و ح اَ و ك ا و ك اَ بأقواس دوائر عظيمة فيحدث ح ا = ح اَ
* لان ح ب عمود على وسط ا اَ وهكذا يكون ك ا = ك اَ وحينئذ فمحيط الدائرة
* الذى يمر بنقطة ا لابد له أن يمر أيضا بنقطة اَ

* نتيجة ١ ـ اذا لم يشترك محيطا دائرتين صغيرتين الا فى نقطة واحدة أى اذا تماسا فان نقطة
* تماسهما توجد على الخط الواصل بين المركزين
* نتيجة ٢ ـ الدائرتان الصغيرتان اللتان يشتركان فى نقطتين على الخط الواصل بين المركزين
* يتحدان معا
* نتيجة ٣ ـ لا يمكن أن يشترك الدائرتان الصغيرتان فى نقطتين تكون احداهما على الخط
* الواصل بين المركزين وثانيتهما خارجة عنه

دعوى نظـــــرية

* (٢٨٤) اذا اشترك محيطا دائرتين صغيرتين فى نقطتين كان الخط الواصل بين مركزيهما عمودا
* على وسط الوتر المشترك (شكل ٢٣٦) وللبرهنة على ذلك يقال ان النقطتين المذكورتين
* لا يمكن أن تكونا على الخط الواصل بين المركزين (٢٨٣ نتيجة ٢) وكذا لا يمكن أن تكون
* احداهما عليه والاخرى خارجة عنه (٢٨٣ نتيجة ٣) وحيث ان كل واحد من مركزى
* الدائرتين متساوى البعد عن النقطتين المذكورتين فيوجدان اذن على قوس الدائرة العظيمة
* العمودى على وسط قوس الدائرة العظيمة الواصل بينهما

الفصـــــل السادس

فى بعض مسائل عمليـــة تطبيقية

دعوى عمليـــة

(٢٨٥) المطلوب رسم قوس دائرة عظيمة يمر بنقطتين معلومتين (شكل ٢٣٧)

شكل ٢٣٧

اذا كان النقطتان المعلومتان هما ا و ب فانه يكفى لحل هذه المسئلة ايجاد القطب و لهاتين النقطتين ولذلك يركز فى كل واحدة منهما و بنصف قطر مساو لربع محيط دائرة عظيمة يرسم قوسان يتقاطعان فى القطب و ثم يركز فى القطب المذكور و بعين نصف القطر يرسم دائرة عظيمة فتمر بالنقطتين ا و ب المفروضتين

* تنبيه — الدائرتان العظيمتان اللتان مركزاهما ا و ب لابد من تقاطعهما لانه لما كان
* البعد المعلوم ا ب أقل من نصف دائرة عظيمة فهو أصغر من مجموع نصفى القطرين ولما
* كان زيادة على ذلك الفرق بين البعدين الاخيرين مساويا للصفر فيكون ا ب أكبر من
* فاضلهما واذن فيكون مجموع الابعاد الثلاثة أقل من محيط دائرة عظيمة

دعوى عمليـــــه

(٢٨٦) المطلوب تنصيف قوس دائرة عظيمة كانت أو صغيرة مرسوم على سطح الكرة (شكل ٢٣٨)

ش ٢٣٨ ح ب ا

لحل هذه المسئلة يجب أن يمر قوس الدائرة العظيمة الجامع للنقط المتساوية البعد عن نهايتى القوس المعلوم

ولذلك يركز فى النقطتين ا و ب وبنصف قطر مناسب يرسم قوسا دائرتين يتقاطعان فى النقطتين ح و ى من نقط المحل المطلوب فاذا أريد الآن تمرير قوس دائرة عظيمة بهاتين النقطتين فانه يجرى العمل كما سبق بنمرة ٢٨٥

دعوى عمليـــــة

(٢٨٧) المطلوب تمرير من نقطة معلومة على سطح الكرة دائرة عظيمة عمودية على مستوى دائرة عظيمة معلومة (شكل ٢٣٩)

أولا — اذا كانت الدائرة العظيمة المعلومة مرسومة بتمامها على سطح الكرة فانه يركز فى نقطة ا وبنصف قطر مساو ربع محيط دائرة عظيمة يرسم قوس دائرة يقطع الدائرة المعلومة فى نقطة مثل ى تكون قطبا للدائرة العظيمة المطلوب تمريرها من نقطة ا

ش ٢٣٩ ا ب ى ه ح

لانه اذا تعامد دائرتان عظيمتان فقطب احداهما يوجد ضرورة على محيط الاخرى

ثانيا — اذا لم تكن الدائرة العظيمة المعلومة مرسومة بتمامها فانه يركز فى نقطة ا وبنصف قطر مناسب يرسم قوس يقطع القوس المعلوم فى النقطتين ه و ب المتساويى البعد عن نقطة ا ثم يمرر بعد ذلك قوس الدائرة العظيمة المنصف للقوس ه ى كما تقدم بنمرة ٢٨٦

دعوى عمليـــــه

(٢٨٨) المطلوب تمرير محيط دائرة على سطح الكرة يمر بثلاث نقط معلومة عليه ا و ب و ح طريقة ذلك أن ترسم الدائرة العظيمة الجامعة للنقط المتساوية البعد عن النقطتين ا و ب (٢٨٦) ثم ترسم أيضا الدائرة العظيمة الجامعـة للنقط المتساوية البعد عن النقطتين ب و ح (٢٨٦) فيتقاطع هاتان الدائرتان فى قطب الدائرة ا ب ح المطلوبة

تنبيه - الدائرة العظيمة الجامعة للنقط المتساوية البعد عن النقطتين ا و ب تمر أيضا بقطب الدائرة الصغيرة ا ب ح ومن ذلك يمكن ايراد هذه النظرية

اذا أقيم على أواسط أضلاع مثلث كروى دوائر عظيمة عمودية عليها فانها تتقاطع فى نقطة واحدة تكون مركزا للدائرة المرسومة على المثلث المذكور

دعوى عمليـــــه

(٢٨٩) اذا علمت نقطة خارج قوس دائرة عظيمة والمطلوب تمرير قوس دائرة عظيمة منها يصنع مع الاول زاوية معلومة (شكل ٢٤٠)

وللوصول الى ذلك نفرض أن المسئلة محلولة وأن ا ح هو القوس المطلوب فاذا ركز فى نقطة ا ورسم قوس الدائرة العظيمة ح ب بنصف قطر مساو ربع محيط دائرة عظيمـة واخذ عليـه بعد مساو لقوس الزاوية المطلوبة فتتعين بذلك نقطة ح فاذا وصل بينها و بين نقطة ا بقوس دائرة عظيمة تكون الزاوية حاب هى الزاوية المطلوبة

ش ٢٤٠

الفصـــــل السابـع

تمـــرينات

١ - المعلوم قوس من دائرة عظيمة مرسوم على سطح الكرة والمطلوب تكميل محيط الدائرة العظيمة الذى هو جزء منه

٢ - المطلوب البرهنة على أن نقطتى تماس المستويين المتوازيين المماسين لسطح الكرة هما نهايتا أحد اقطارها

* ٣ - المطلوب رسم المثلث الكروى اذا علم منه
* أولا - أضلاعه الثلاثة
* ثانيا - زواياه الثلاثة
* ثالثا - ضلعان والزاوية المحصورة بينهما
* رابعا - ضلع والزاويتان المجاورتان له

الباب الثالث
فى كثيرى السطوح

الفصل الاول
تعاريف

(٢٩٠) كثير السطوح هو جسم محاط من جميع جهاته بمضلعات مستوية تسمى أوجهه وأضلاع تلك الاشكال المستوية تسمى أحرفه ورؤسها هى رؤسه وكل حرف من هذه الاحرف يشترك بين وجهين بخلاف الرؤس فانها لا تشترك بين أقل من ثلاثة أوجه

وحينئذ فأجزاء كثير السطوح هى الزوايا المجسمة والزوايا الزوجية والاوجه والاحرف

وتمتاز كثيرات السطوح عن بعضها بعدد أوجهها فما كان له أربعة أوجه وهو أقلها عددا يسمى هرما ثلاثيا أو ذا الاربعة أوجه وهكذا

(٢٩١) المنشور هو كثير السطوح المركب من جملة مستويات متقاطعة مثنى فى مستقيمات متوازية ومنتهية بمستويين متوازيين (شكل ٢٤١)

ومن هذا التعريف ينتج

أولا — ان المستقيمات اأَ و ببَ و ... الخ المتوازية المحصورة بين مستويين متوازيين متساوية

ثانيا — ان الاحرف اب و بح و حد و ... الخ هى مساوية وموازية على التناظر للاحرف أَبَ و بَحَ و حَدَ و ... الخ

وبناء عليه يكون الشكلان ابحده و أَبَحَدَهَ متساويين لتساوى الاضلاع والزوايا المتناظرة فيهما ويسميان قاعدتى المنشور

المستقيم م مَ الذى يقدر به البعد الكائن بين القاعدتين يسمى ارتفاع المنشور

المنشور يكون قائما أو مائلا على حسب ما تكون أحرفه الجانبية عمودية أو مائلة على مستوى

القاعدتين غيران المنشور القائم تكون فيه الاشكال المتوازية الاضلاع الجانبية مستطيلات ويكون أحد أحرفه ارتفاعاله

(٢٩٢) متوازى السطوح هو منشور قاعدتاه شكلان متوازيا الاضلاع فاذا كان قائما وقاعدتاه مستطيلين فانه يسمى بمتوازى المستطيلات

(٢٩٣) المكعب هو متوازى مستطيلات قاعدته شكل مربع وارتفاعه مساو أحد أحرف قاعدته ومن هذا التعريف ينتج ان أوجه المكعب هى مربعات متساوية

(٢٩٤) الهرم هو جسم محدد بمضلع مستو ا ب ح د هـ وبجملة مثلثات قواعدها الاضلاع المختلفة لهذا المضلع ورؤسها مجتمعة فى نقطة واحدة س خارج المضلع المذكور (شكل ٢٤٢) وتسمى نقطة س برأس الهرم وأما المضلع ا ب ح د هـ فيسمى قاعدته والعمود س و النازل من رأسه الى قاعدته يسمى ارتفاع الهرم وتمتاز الاهرامات عن بعضها بعدد أوجهها المحيطة بالرأس أو بعدد أضلاع شكل قاعدته فما كانت قاعدته مثلثا يسمى هرما ثلاثيا وما كانت قاعدته شكلا رباعيا يسمى هرما رباعيا وهكذا

الهرم المنتظم ما كانت قاعدته شكلا منتظما وكان مركزها موقع العمود النازل من رأسه عليها

(٢٩٥) كثير السطوح المحدب هو الذى يوجد بتمامه فى احدى جهتى امتداد أى وجه من أوجهه ولم نتكلم هنا الا على كثيرات السطوح المحدبة

وينتج من تعريف الشكل المحدب أن المستقيم لا يمكن أن يقطعه فى أكثر من نقطتين

الفصل الثانى

فى المبادى

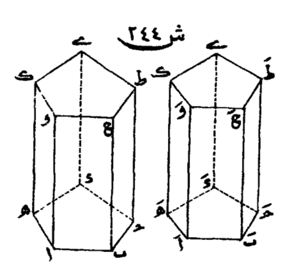
دعوى نظرية

(٢٩٦) اذا قطع المنشور بمستويات متوازية فان القطاعات الحادثة تكون مضلعات مستوية متساوية (شكل ٢٤٣)

اذا كان المستويان القاطعان هما اب ح ء هـ ، اَ بَ حَ ءَ هَ فالمستقيمان اب و اَ بَ يكونان متوازيين لانهما خطا تقاطع مستويين متوازيين بمستو ثالث وحيث انهما محصوران بين مستويين متوازيين فيكونان متساويين أيضا وبناء عليه فكثيرا الاضلاع اب ح ء هـ و اَ بَ حَ ءَ هَ متساويان لتساوي أضلاعهما وزواياهما المتناظرة الموضوعة على ترتيب واحد

دعوى نظريه

(٢٩٧) يتساوى المنشوران اذا ساوى من أحدهما الاوجه الثلاثة المركبة لاحدى زواياه المجسمة لنظائرها من الثاني وكانت موضوعة على ترتيب واحد (شكل ٢٤٤)



اذا كانت الاوجه الثلاثة المركبة للمجسمتين الثلاثيتين ا و اَ متساوية وكانت موضوعة على ترتيب واحد بأن كان

اب ح ء هـ = اَ بَ حَ ءَ هَ ، اب ع و = اَ بَ عَ وَ ، ا هـ ك و = اَ هَ كَ وَ

فانا نبرهن على امكان انطباق أحد الجسمين على الآخر انطباقا تاما

ولذلك نضع المنشور الثاني على الاول بأن نطبق القاعدة اَ بَ حَ ءَ هَ على مساويتها وحيث ان المجسمتين ا و اَ متساويتان (٢٤٠ ثالثا) فيأخذ الحرف اَ وَ الاتجاه ا و وحيث انهما متساويان فتقع نقطة وَ على نقطة و وبعد انطباق اَ وَ على ا و تنطبق باقي أحرف المنشور الثاني بَ عَ ، حَ طَ ، ... الخ على نظائرها من الاول وبذلك ينطبق المنشوران على بعضهما ويتساويان

نتيجة ـ اذا كان المنشوران قائمين فانه يكفي في تساويهما حصول التساوي بين قاعدتيهما وارتفاعيهما لان ذلك كاف لانطباق أحد المنشورين على الثاني

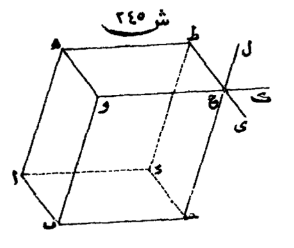
دعوى نظــــــريه

(٢٩٨) كل متوازى سطوح يكون فيه

أولا ـ الاوجه المتقابلة متساوية ومتوازية

ثانيا ـ الزوايا الزوجية المتقابلة متساوية

ثالثا ـ الزوايا المجسمة الثلاثية المتقابلة متماثلة (شكل ٢٤٥)



برهان الاول يقال ـ أما القاعدتان ا ب حـ د و هـ و ح ط فهما على مقتضى تعريف متوازى السطوح متساويتان ومتوازيتان وأما الوجهان ا ب و هـ , د حـ ح ط ففيهما الضلعان ا ب , د حـ متساويان ومتوازيان لانهما ضلعان متقابلان من الشكل المتوازى الاضلاع ا ب حـ د والضلعان ب و , حـ ح كذلك لانهما من متوازى الاضلاع ب و ح حـ والضلعان هـ و , ح ط كذلك أيضا لانهما من متوازى الاضلاع هـ و ح ط وبناء عليه فيكونان متوازيين ومتساويين وبمثل ذلك يبرهن على توازى وتساوى الوجهين ب حـ ح و , ا د ط هـ

برهان الثانى يقال ـ أما الزوجيتان ا ب , ح ط فهما متساويتان لانا لو مررنا مستويا عموديا على حرفيهما فانه يقطع وجهى كل واحدة منهما فى مستقيمين يتكون بينهما زاويتهما المستوية ولتوازى أضلاع الزاويتين المستويتين المذكورتين ومضادتهم فى الجهة تكونان متساويتين وبمثل ذلك يبرهن على تساوى باقى الزوجيات

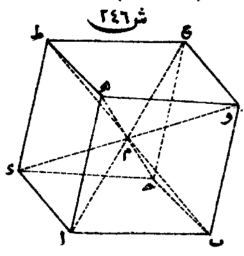
برهان الثالث يقال ـ ان المجسمتين الثلاثيتين ا , ح نجد انهما مركبتان من اجزاء متساوية غير انها موضوعة على ترتيب منعكس لانا لو مددنا أحرف المجسمة ح على استقامتها فانه يتشكل منها زاوية مجسمة مساوية للمجسمة ا لتركبهما من اجزاء متساوية موضوعة على ترتيب واحد

نتيجة ـ يمكن اعتبار أى وجهين متقابلين من متوازى السطوح كأنهما قاعدتان له

تنبيه ـ فى الحالة الخصوصية التى يكون فيها متوازى السطوح قائما يكون فى كل واحدة من المجسمتين ا , ح زاويتان مستويتان قائمتان وبذلك يمكن انطباقهما على بعضهما

دعوى نظـــــرية

(٢٩٩) أقطار متوازى السطوح الاربعة تنصف بعضها (شكل ٢٤٦)



ليكن اب ح د هـ و ع ط متوازى السطوح المعلوم فاذا اعتبرنا القطرين اع , ح هـ ووصلنا ع هـ , اح نرى ان الشكل اح ع هـ متوازى أضلاع لان الضلعين اهـ , ح ع متوازيان ومتساويان وحينئذ فقطراه ينصفان بعضهما وبمثل ذلك يبرهن على باقى الاقطار

تنبيه ١ - نقطة تقابل الاقطار تسمى أحيانا مركز متوازى السطوح

تنبيه ٢ - أقطار متوازى المستطيلات متساوية ومربع أحدها يساوى مجموع مربعات الاحرف الثلاثة المجتمعة معه فى احدى الرأسين الواصل هو بينهما (شكل ٢٤٧)

برهان الاول - اذا اعتبرنا القطرين اع , ح هـ نجد انهما متساويان لان الشكل اح ع هـ مستطيل

برهان الثانى - يؤخذ من المثلث القائم الزاوية اح ع ان

$$\text{اع}^2 = \text{اح}^2 + \text{حع}^2 = \text{اح}^2 + \text{اهـ}^2$$

لكن اح^2 من المثلث القائم الزاوية اب ح مساو $\text{اب}^2 + \text{بح}^2$ أو مساو الى $\text{اب}^2 + \text{اد}^2$ واذن يكون

$$\text{اع}^2 = \text{اب}^2 + \text{اد}^2 + \text{اهـ}^2$$ وهو المراد

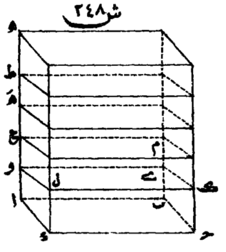
الفصـــــل الثـالث

فى قياس حجم متوازى السـطوح

(٣٠٠) اذا اعتبرنا حجم المكعب المنشأ على وحدة الاطوال وحدة للاحجام فيكون حجم أى كثير سطوح هو النسبة الكائنة بين حجمه وحجم ذلك المكعب المعتبر وحدة

دعوى نظـــرية

(٣٠١) النسبة بين متوازيى المستطيلات المتحدين فى القاعدة كالنسبة بين ارتفاعيهما (شكل ٢٤٨)



لنفرض اولا وجود مقياس مشترك بين الارتفاعين اه و اهَ بحيث يكون مثلا $\frac{اه}{اهَ} = \frac{٥}{٣}$

فاذا تصورنا مرور مستويات موازية للقاعدة من نقط تقاسيم الارتفاعين فان متوازى المستطيلات الاول ينقسم الى خمسة متوازيات المستطيلات متساوية لاتحادها فى القاعدة والارتفاع وأما الثانى فانه ينقسم الى ثلاثة فقط متساوية أيضا

وحينئذ اذا رمز بالرمزين ح و حَ لحجمى الجسمين تحصل $\frac{ح}{حَ} = \frac{٥}{٣}$

ومن هذا التناسب والسابق يحدث

$$\frac{ح}{حَ} = \frac{اه}{اهَ} = \frac{ع}{عَ}$$

بفرض ان ع و عَ يدلان على الارتفاعين

وأما اذا لم يوجد بين الارتفاعين مقياس مشترك فانه يبرهن كما سبق (بنمرة ٨٠ جزء أول) على ان النسبة بين حجمى الجسمين المذكورين على أى حالة كانت هى كالنسبة بين ارتفاعيهما

تنبيه — يطلق على الاحرف الثلاثة الخارجة من رأس واحدة من رؤس متوازى المستطيلات اسم ابعاد الجسم ومتى علمت هذه الابعاد فان متوازى المستطيلات يتعين تعيينا تاما

وحيث قد علم مما تقدم انه يمكن اعتبار قاعدة الجسم المذكور أى وجه من أوجهه أمكن التعبير عن منطوق النظرية السابقة بهذه العبارة الآتية

النسبة بين متوازيى المستطيلات المتحدين فى بعدين من ابعادهما الثلاثة كالنسبة بين بعديهما الثالثين

دعوى نظـــــرية

(٣٠٢) النسبة بين متوازيى المستطيلات المتحدين فى الارتفاع كالنسبة بين قاعدتيهما

اذا كان متوازيا المستطيلات المعلومان هما ع و عَ وابعاد الاول هى ا و ب و حـ وابعاد الثانى هى اَ و بَ و حـ واعتبرنا الوجهين ا ب و اَ بَ قاعدتين لهما فيكون حـ ارتفاعهما المشترك

ثم اذا اعتبرنا متوازى مستطيلات ثالث عً وابعاده ا و بَ و حـ وقارناه بمتوازيى المستطيلات السابقين نحصل على مقتضى النظرية السابقة ان

$$\frac{ع}{عً}=\frac{ب}{بَ} \quad و \quad \frac{عً}{عَ}=\frac{ا}{اَ} \quad أو \quad \frac{ع}{عَ}=\frac{ا}{اَ}\times\frac{ب}{بَ}$$

وقد علم فى الباب الاول من الجزء الثانى ان الحاصل $\frac{ا}{اَ}\times\frac{ب}{بَ}$ يدل على النسبة الكائنة بين مستطيلين بعدا أحدهما ا و ب وبعدا الثانى اَ و بَ فاذا رمز لهذين السطحين بالرمزين ن و نَ أمكن ان يكتب $\frac{ع}{عَ}=\frac{ن}{نَ}$ وهو المراد

نتيجة — اذا فرضنا تقدير الابعاد ا و ب و حـ و اَ و بَ و حـ باعداد كان $\frac{ا}{اَ}\times\frac{ب}{بَ}=\frac{اب}{اَبَ}$ وحينئذ فيمكن التعبير عن منطوق النظرية المتقدمة بالطريقة الآتية

النسبة بين متوازيى المستطيلات المتحدين فى بعد واحد كالنسبة بين حاصل ضرب بعديهما الآخرين

دعوى نظـــــرية

(٣٠٣) النسبة بين أى متوازيى المستطيلات كالنسبة بين حاصل ضرب قاعدة الاول فى ارتفاعه الى حاصل ضرب قاعدة الثانى فى ارتفاعه

فاذا كان ع و عَ متوازيى المستطيلات المعلومين وابعاد الاول هى ا و ب و حـ وأبعاد الثانى هى اَ و بَ و حَ وفرض متوازى مستطيلات ثالث عً وابعاده ا و ب و حَ وقارناه بكل واحد من المعلومين فانه يحصل على مقتضى النظريتين السابقتين هذان التناسبان

$$\frac{ع}{عً}=\frac{حـ}{حَ} \quad و \quad \frac{عً}{عَ}=\frac{ا}{اَ}\times\frac{ب}{بَ} \quad أو \quad \frac{ع}{عَ}=\frac{ا}{اَ}\times\frac{ب}{بَ}\times\frac{حـ}{حَ}$$

ثم اذا فرض تقويم الابعاد باعداد أمكن ان يكتب $\frac{ع}{عَ}=\frac{ا ب حـ}{اَ بَ حَ}=\frac{ن ع}{نَ عَ}$

نتيجة ـ اذا فرض ان ح هو المكعب المختار وحدة للاجسام فتكون ابعاده أ و بَ و حَ وحدة الاطوال المرموز له بحرف ل وحينئذ يكون $\frac{ح}{ع} = \frac{أ}{ل} \times \frac{ب}{ل} \times \frac{ح}{ل}$
وحيث ان المقادير $\frac{ح}{ع}$ و $\frac{أ}{ل}$ و $\frac{ب}{ل}$ و $\frac{ح}{ل}$ تدل على مقاس الكميات ح و ا و ب و ح امكن ان يقال لقياس حجم متوازى المستطيلات يضرب مقاسات ابعاده الثلاثة فى بعضها
ومن جهة أخرى حيث ان الحاصل $\frac{أ}{ل} \times \frac{ب}{ل}$ يدل على مقاس القاعدة (أ و ب) امكن ان يقال ايضا لقياس حجم متوازى المستطيلات بضرب مقاس قاعدته فى مقاس ارتفاعه

تنبيه ـ يجب أن يتذكر دائما ان منطوق هذه النظرية يقضى أن يكون وحدة السطوح هو المربع المنشا على وحدة الاطوال ووحدة الاجسام هو المكعب المنشا على وحدة الاطوال

دعوى نظـــــرية

(٣٠٤) متوازيا السطوح المتحدان فى قاعدة واحدة وقاعدتاهما الاخريان فى مستو واحد ومحصورتان بين مستقيمين متوازيين يكونان متكافئين (شكل ٢٤٩)

ليكن اب ح ى هـ و ح ط , اب ح ى هـ َ و َ ع َ ط َ متوازيى السطوح المعلومين المتحدين فى القاعدة السفلى اب ح ى وقاعدتاهما العليان هـ و ح ط , هـ َ و َ ع َ ط َ فى مستو واحد ومحصورتان بين المستقيمين المتوازيين هـ و َ و ط ع َ نعتبر فى الشكل الكلى المنشورين الثلاثيين هـ ا هـ َ ط ى ط َ , و ب و َ ع ح ع َ فيشاهد فيهما ان الجسمتين الثلاثيتين هـ , و محاطتين بثلاثة أوجه متساوية النظير لنظيره وموضوعة على ترتيب واحد
وبيانها المثلث هـ ا هـ َ = المثلث و ب و َ لتساوى وتوازى اضلاعهما المتناظرة
والوجه هـ ا ى ط = الوجه و ب ح ع لكونهما وجهين متقابلين من متوازى سطوح واحد
والوجه هـ هـ َ ط َ ط = الوجه و و َ ع َ ع لاشتراكهما فى الجزء و هـ َ ط َ ع ولتساوى الجزأين الباقيين منهما للقاعدة المشتركة اب ح ى وحينئذ فالمنشوران الثلاثيان المذكوران متكافئان لكنه اذا طرحنا من الشكل الكلى المنشور الثلاثى الاول كان الباقى هو متوازى السطوح الثانى

واذا طرحنا المنشور الثانى كان الباقى هو متوازى السطوح الاول وبناء عليه فتوازيا السطوح متكافئان

دعوى نظـــــرية

(٣٠٥) متوازيا السطوح المتحدان فى القاعدة والارتفاع متكافئان (شكل ٢٥٠)

حيث قد فرض اتحاد متوازيى السطوح ح و حَ فى القاعدة السفلى ا ب حـ د وفى الارتفاع فتكون قاعدتاهما العليان ضرورة فى مستو واحد موازٍ للقاعدة ا ب حـ د فان كانتا مع ذلك محصورتين بين مستقيمين متوازيين ثبت المطلوب (٣٠٤) والا فنمد هـ و , ح ط , هـَ طَ , وَ حَ فيتشكل من ذلك شكل متوازى الاضلاع هـً وً حً طً مساو وموازٍ للقاعدة ا ب حـ د

وذلك لانه حيث كان هـً وً مساويا وموازيا هـَ وَ فيكون مساويا وموازيا ا ب وكذلك حيث كان هـً طً مساويا وموازيا هـ ط فيكون مساويا وموازيا ا د

وحينئذ فيمكن اعتبار هـً وً حً طً كأنه قاعدة علوية لمتوازى سطوح ثالث حً مشترك مع الاولين فى القاعدة السفلى ا ب حـ د

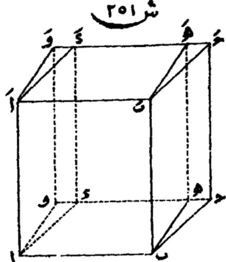
واذا قارنا متوازى السطوح الاخير حً بكل واحد من متوازيى السطوح ح و حَ نشاهد على مقتضى النظرية السابقة انه يكافئ كل واحد منهما واذن فهما متكافئان

نتيجة ـ كل متوازى سطوح مائل يمكن تحويله الى آخر قائم يكافئه متحد معه فى القاعدة والارتفاع وذلك لانه اذا اقيمت من رؤس القاعدة السفلى أعمدة عليها ومدت حتى تلاقى مستوى القاعدة العليا فانه يتشكل من ذلك متوازى سطوح قائم متحد مع الاول فى القاعدة والارتفاع وبناء على النظرية السابقة يكون مكافئا للاول

دعوى نظـــــرية

(٣٠٦) كل متوازى سطوح قائم يمكن تحويله الى متوازى مستطيلات يكافئه متحد معه فى الارتفاع وقاعدتاهما متكافئتان (شكل ٢٥١) ليكن ا ب حـ د و اَ بَ حَ دَ متوازى

السطوح القائم فعلى مقتضى الفرض تكون قاعدتاه شكلين متوازيي الاضلاع وأما أوجهه فهي مستطيلات



فاذا اعتبرنا الوجهين المتقابلين ا ب اَ بَ و ح ء حَ ءَ من متوازى السطوح قاعدتين له واقيم من النقط ا و ب و اَ و بَ أعمدة على القاعدة ا ب اَ بَ فتنحصر هذه الاعمدة بين مستويي القاعدتين وتكون أعمدة على الحرفين ا ب و اَ بَ ثم اذا وصل ه هَ و و وَ فانه يتكون متوازى مستطيلات يكافئ متوازى السطوح القائم (٣٠٤)

ونشاهد غير ذلك ان القاعدة ا ب ح ء قد استعوضت بالمستطيل ا ب ه و المكافئ لها وأما الارتفاع ا اَ فهو باق على حاله وبذلك ثبت المطلوب

نتيجة — ينتج مما ذكر أن مساحة متوازى السطوح تساوى لحاصل ضرب مقاس قاعدته فى مقاس ارتفاعه لانه يكافئ متوازى المستطيلات المتحد معه فى القاعدة والارتفاع

تنبيه — من المعلوم ان المساحة السطحية الجانبية لمتوازى سطوح معلوم عبارة عن مجموع مسائح الاوجه الجانبية له وحيث ان كل وجهين متقابلين فيه متساويان فيؤخذ اذن ضعف مساحة وجهين متجاورين منه ويضمان الى بعضهما

فاذا دل ا و ب على ضلعين متجاورين من قاعدته و ع و عَ على ارتفاعى المستطيلين المتجاورين المشتملين عليهما و س على المساحة الجانبية تحصل

$$س = ٢ (ا ع + ب عَ)$$

واذا اريد ضم مساحتى القاعدتين العليا والسفلى الى هذه المساحة وفرض أن ء يدل على ارتفاع القاعدة حدث

$$المساحة السطحية الكلية = ٢ (ا ع + ب عَ) + ٢ ا ء = ٢ (ا ع + ب عَ + ا ء)$$

أما فى حالة ما يكون الجسم متوازى سطوح قائما فان ع و عَ يكونان مساويين للحرف الثالث ح ويؤل القانونان المتقدمان الى

$$س = ٢ (ا + ب) \times ح \quad و \quad المساحة السطحية الكلية = ٢ (ا ح + ب ح + ا ء)$$

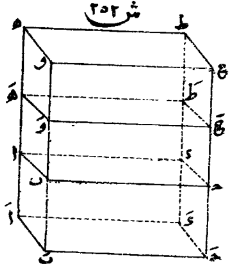
وفى حالة ما يكون الجسم متوازى مستطيلات فان د يكون مساويا ب وتكون المساحة السطحية الكلية مساوية الى ٢ (اح + ب ح + اب)

الفصل الرابع

فى قياس المنشور

دعوى نظرية

(٣٠٧) أى منشور يكافئ منشورا قائما تكون قاعدته القطع العمودى على أحرفه وارتفاعه يكون مساويا لطول حرفه (شكل ٢٥٢)



ليكن اب ح د ه و ح ط المنشور المعلوم فاذا مد من نقطة هَ احدى نقط الحرف اه مستو عمودى عليه فيكون عمودا ضرورة على جميع الاحرف ويحدد على المنشور القطع العمودى هَ وَ حَ طَ ثم اذا أخذ بعد ذلك هَ اَ = ه ا ومد من نقطة اَ قطع آخر عمودى اَ بَ حَ دَ فان الجسم المحصور بين هذين القطعين العموديين يكون منشورا (٢٩١)

وللبرهنة على تكافؤ المنشورين اب ح د ه و ح ط و اَ بَ حَ دَ هَ وَ حَ طَ يقارن الجزء المنشورى اَ بَ حَ دَ اب ح د بالجزء المنشورى هَ وَ حَ طَ ه و ح ط فمن حيث ان القاعدتين اَ بَ حَ دَ و هَ وَ حَ طَ متساويتان فانه يمكن وضع احداهما على الاخرى وانطباقهما على بعضهما وحيث كان ا اَ عمودا على القطع العمودى فيأخذ بعد الانطباق الاتجاه ه هَ وحيث ان اَ هَ = اه يكون ا اَ = ه هَ وبذلك تقع نقطة ا على نقطة ه وبمثل ذلك يبرهن على انطباق باقى النقط ب و ح و د على النقط ه و ح و ط وحينئذ يكون جزآ المنشورين متساويين

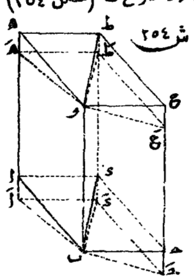
فاذا طرح على التوالى كل واحد من جزأى المنشورين المذكورين من الجسم الكلى فان الباقيين الناتجين وهما المنشور المائل والمنشور القائم يكونان متكافئين وهو المطلوب

دعوى نظـــــرية

(٣٠٨) المستوى المار بحرفين متقابلين من متوازى السطوح يقسمه الى منشورين ثلاثيين متكافئين

أولاً ـ اذا كان متوازى السطوح قائماً مثل ا ب حـ ء هـ و ح ط (شكل ٢٥٣) فانه يسهل البرهنة على تكافؤ المنشورين الثلاثيين ا ب ء هـ و ط , ء ب حـ ط و ح القائمين المنقسم اليهما بالمستوى ط و ء ب وذلك لاتحادهما فى الارتفاع ح حـ ولتساوى قاعدتيهما الامكان انطباقهما على بعضهما بعد الدوران

ثانياً ـ اذا كان متوازى السطوح المعلوم مائلاً مثل ا ب حـ ء هـ و ح ط (شكل ٢٥٤) فانها تتعذر البرهنة على تكافؤ المنشورين الثلاثيين ا ب ء هـ و ط , ء ب حـ ط و ح المنقسم اليهما متوازى السطوح بواسطة التطبيق كما فى الحالة الاولى غير أنا نبرهن على التكافؤ بالطريقة الآتية



نمرر بالنقطتين ب و مستويين عمودين على الحرف ب و فيكونان عمودين على جميع أحرف متوازى السطوح ويقطعانها فى النقط اَ و ءَ و حَ و هَ و طَ و حَ وحيث ان الاوجه المتقابلة من متوازى السطوح متوازية يكون اَءَ موازيا ب حَ و اَب موازيا حَءَ , وهَ موازيا حَطَ , و حَ موازيا هَطَ واذن فيكون القطعان شكلين متوازيى الاضلاع ومثلهما باقى الاوجه وحيث انهما عمودان على الحرف ب و فيكونان متوازيين وعلى مقتضى ما تقرر (بنمرة ٢٩٦) يكونان متساويين وبناء عليه يكون الجسم الحادث منشوراً وهو قائم لكون الحرف ب و عموداً على مستوى القاعدة

اذا تقرر هذا ولاحظنا ما ذكر (بنمرة ٣٠٧) من أن أى منشور يكافئ منشوراً قائماً قاعدته القطع العمودى على أحرفه وارتفاعه طول حرفه نجد من جهة أن المنشور ا ب حـ ء هـ و ح ط يكافئ المنشور القائم اَ بَ حَ ءَ هَ وَ حَ طَ ومن جهة أخرى أن كل واحد من المنشورين الثلاثيين ا ب ء هـ و ط , ء ب حـ ط و ح يكافئ المنشور القائم الثلاثى المناظر له وحيث ان المنشورين الثلاثيين القائمين متكافئان كما ذكر أولاً فيكون المائلان كذلك وهو المطلوب

نتيجة ١ — مساحة المنشور الثلاثي تساوي حاصل ضرب مقاس قاعدته في مقاس ارتفاعه وذلك لانه لما كان متوازي السطوح يتركب من منشورين ثلاثيين متكافئين متحدين معه في الارتفاع ومجموع قاعدتيهما مساو لقاعدته كانت مساحة أيهما تساوي نصف مساحة متوازي السطوح فاذا دلت ن على قاعدة المنشور الثلاثي ودل ع على ارتفاعه تكون مساحة متوازي السطوح مساوية ٢ ن × ع وتكون مساحة المنشور الثلاثي مساوية الى

$$\frac{1}{2} \text{ ٢ ن } \times \text{ ع } = \text{ ن } \times \text{ ع}$$

نتيجة ٢ — مساحة أي منشور تساوي حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه (شكل ٢٥٥)

وذلك لانه يمكن تقسيمه بواسطة المستويات القطرية هـ حَ هـ ح و هـ بَ هـ ب الى منشورات ثلاثية متحدة معه في الارتفاع وحيث ان مساحة كل واحد منها تساوي حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه وان مجموع قواعدها عبارة عن قاعدة المنشور فيكون مجموع هذه المسائح أو المساحة المطلوبة مساوية حاصل ضرب قاعدة المنشور في ارتفاعه

نتيجة ٣ — ويمكن أخذ مساحة المنشور أيضا بواسطة ضرب طول حرفه في القطع العمودي عليه كما في نمرة (٣٠٥)

تنبيه — المساحة السطحية الجانبية للمنشور تساوي مجموع مسائح أوجهه المتركب هو منها وفي حالة ما تطلب المساحة السطحية الكلية للمنشور فانه يضم الى ما سبق مساحة القاعدتين

الفصل الخامس

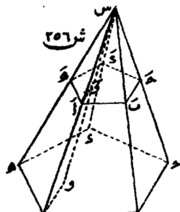
في قياس الهرم

دعوى نظرية

(٣٠٩) اذا قطع الهرم بمستو موازٍ لقاعدته فان أحرفه وارتفاعه تنقسم به الى أجزاء متناسبة ويكون شكل القطع مشابها للقاعدة (شكل ٢٥٦)

اذا كان س ا ب ح ء هـ هرما و اَ بَ حَ ءَ هَ قطعا موازيا لقاعدته و س و و س وَ ارتفاعي الهرمين الكلي والاصغر وتصورنا مرير مستو بالحرف س ا وبالارتفاع س و فانه يقطع القاعدة والقطع في المستقيمين ا و و اَ وَ المتوازيين ثم اذا لاحظنا بعد ذلك

أن المستقيمات أَ بَ و بَ حَ و حَ دَ و دَ هَ و ... الخ موازية بالتناظر للمستقيمات أ ب و ب ح و ح د و د هـ و ... الخ نرى أن المثلثات س أَ بَ و س بَ حَ و س حَ دَ و ... الخ مشابهة للمثلثات س أ ب و س ب ح و س ح د و ... الخ وبناء عليه تحدث سلسلة التناسبات الآتية



$$\frac{س أ}{س أَ} = \frac{أ ب}{أَ بَ} = \frac{س ب}{س بَ} = \frac{ب ح}{بَ حَ} = \frac{س ح}{س حَ}$$

$$= \frac{ح د}{حَ دَ} = \frac{س د}{س دَ} = \frac{د هـ}{دَ هَ} = \frac{س هـ}{س هَ} = \frac{س ح}{س حَ}$$

ومن هذه السلسلة ينتج

أولا — أن أحرف الهرم وارتفاعه منقسمة الى أجزاء متناسبة بالمستوى القاطع

ثانيا — ان الزوايا المتناظرة من القاعدة والقطع متساوية وأن الاضلاع فيهما متناسبة وبذلك يكونان متشابهين وهو المراد

نتيجة ١ — اذا قطع هرمان متحدا الارتفاع بمستويين موازيين لقاعدتيهما ومتباعدين عنهما ببعد واحد فان النسبة بين القطعين تكون مساوية للنسبة بين القاعدتين

لانه اذا دل ع على ارتفاع الهرمين المشترك و عَ على بعد رأس كل هرم عن مستوى القطع و ح و حَ على مساحتي القاعدتين و د و دَ على مساحتي القطعين حدث على مقتضى النظرية السابقة أن

$$\frac{ح}{د} = \frac{ع^2}{عَ^2} \text{ و } \frac{حَ}{دَ} = \frac{ع^2}{عَ^2} \text{ أو } \frac{ح}{د} = \frac{حَ}{دَ}$$ وهو المراد

نتيجة ٢ — اذا كان القاعدتان متكافئتين يكون القطعان كذلك

دعوى نظـــــرية

(٣١٠) الهرمان الثلاثيان المتكافئان فى القاعـدة والمتحـدان فى الارتفاع متكافئان (شكل ٢٥٧)

نفرض أن قاعدتى الهرمين ا ب ح و أَ بَ حَ فى مستو واحد وأن ارتفاعهما المشترك هو ا ح فاذا قيل بعدم تكافئ الهرمين المذكورين وان س ا ب ح هو أكبرهما فنفرض أن الفرق بينهما يكافئ منشورا ثلاثيا قاعدته ا ب ح وارتفاعه ا م ثم نقسم الارتفاع ا ح

الى أجزاء متساوية بحيث يكون كل جزء منها أقل من ام ونمد من نقطة التقاسيم مستويات موازية لمستويي القاعدتين فتكون القطاعات الحادثة متكافئة (٣٠٩ نتيجة ٢)

ثم اذا اعتبرنا كلا من قاعدة الهرم الاول وقطاعاته قواعد وانشأنا عليها مناشير ثلاثية خارجة فانه يتشكل على الهرم المذكور أربع مناشير ثلاثية متحدة فى الارتفاع ومجموعها يكون أكبر منه ضرورة وكذا اذا اعتبرنا قطاعات الهرم الثانى دون قاعدته كانها قواعد وأنشأنا عليها مناشير ثلاثية داخلة فانه يتشكل داخل الهرم المذكور ثلاث مناشير ثلاثية متحدة فى الارتفاع ومجموعها أقل منه

وبناء على ما ذكر يكون الفرق بين مجموع المناشير فى الهرم الثانى وبين مجموعها فى الاول أكبر بكثير من الفرق بين الهرمين ولو تأملنا فى الشكل نرى أن المنشور الثانى من الهرم الاول يكافئ المنشور الاول من الهرم الثانى لتكافئ قاعدتيهما واتحادهما فى الارتفاع وكذا نرى أن الثالث من الهرم الاول يكافئ الثانى من الهرم الثانى والرابع يكافئ الثالث وحينئذ يكون الفرق بين المناشير فى الهرمين منشورا ثلاثيا قاعدته ا ب ح وارتفاعه اء وهو أصغر من المنشور الذى قاعدته ا ب ح وارتفاعه ام الذى اعتبر فرقا بين الهرمين لكنه يؤخذ مما سبق تقريره أن المنشور الذى قاعدته ا ب ح وارتفاعه اء يجب أن يكون أكبر بكثير من المنشور الذى قاعدته ا ب ح وارتفاعه ام وهو محال وبناء عليه فلا يكون للفرض الذى انبنى عليه تلك النتيجة محل أعنى أنه لا يمكن أن يكون الهرم س ا ب ح أكبر من الهرم سَ اَ بَ حَ وبمثل ذلك يبرهن على أن الثانى لا يمكن أن يكون أكبر من الاول فيكونان اذن متكافئين وهو المراد

دعوى نظـــــريه

(٣١١) الهرم الثلاثى هو ثلث المنشور الثلاثى المتحد معه فى القاعدة وفى الارتفاع (شكل ٢٥٨) اذا كان س ا ب ح هرما ثلاثيا معلوما ومد من نقطة س مستو موازلقاعدته ا ب ح ومن نقطتى ا و ح مستقيمان موازيان للحرف س ب ومدا على استقامتهما حتى يتلاقيا

مع المستوى س ء هـ فانه يتشكل من ذلك منشور ثلاثى متحد مع الهرم المعلوم فى القاعدة وفى الارتفاع ويطلب البرهنة على أنه يتركب من ثلاثة اهرامات ثلاثية كل واحد منها يكافئ الهرم المعلوم س ا ب حـ

شكل ٢٥٨

لذلك يقال اذا تصورنا حذف الهرم المعلوم من المنشور الثلاثى فان الباقى يكون هرما رباعيا رأسه س وقاعدته متوازى الاضلاع ا حـ ء هـ فاذا مررنا المستوى س هـ حـ فان الهرم الرباعى ينقسم الى هرمين ثلاثيين متحدين فى الارتفاع ومتساويين فى القاعدة فيكونان متكافئين واذن فلم يبق سوى البرهنة على أن أحد هذين الهرمين يكافئ الهرم المعلوم

وللوصول الى ذلك يقال ان الهرم س ء هـ حـ يمكن اعتبار رأسه حـ وقاعدته ء س هـ وحيث ان المثلث س ء هـ = ا ب حـ فيكون الهرمان متكافئين لاتحادهما أيضا فى الارتفاع

نتيجة ١ — ينتج مما ذكر أن مساحة الهرم الثلاثى تساوى ثلث مساحة حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه فاذا كانت قاعدته ق وارتفاعه ع تكون مساحته مساوية الى $\frac{1}{3}$ ق × ع

نتيجة ٢ — حيث ان أى هرم يمكن تقسيمه الى اهرامات ثلاثية بواسطة المستويات التى تمر برأسه وبأقطار قاعدته الخارجة من رأس واحدة منها وأن مساحة كل واحد من هذه الاهرامات الثلاثية تساوى ثلث حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه فيكون مجموعها أى مساحة الهرم الكلى مساويا الثلث حاصل ضرب مجموع قواعدها فى ارتفاعها المشترك بينها وحيث ان هذه الاهرامات متحدة مع الهرم الاصلى فى الارتفاع وان مجموع قواعدها يدل على قاعدة الهرم المذكور فتكون مساحته تساوى ثلث حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه

نتيجة ٣ — يستفاد مما تقدم أن أى هرم يمكن اعتباره كانه ثلث المنشور المتحد معه فى القاعدة وفى الارتفاع

تنبيه — المساحة السطحية الجانبية للهرم هى مجموع مسائح أوجهه المركب هو منها ويضم الى ذلك اذا اقتضى الحال مساحة القاعدة التى يمكن أن تكون شكلا ما اذا أريد الحصول على المساحة السطحية الكلية غير أن تلك المساحة تختصر أحيانا فيما اذا كان الهرم المعلوم منتظما لان اوجهه تكون فى هذه الحالة مثلثات متساوية الساقين ومتساوية وحينئذ فيكتفى الحال لاخذ مساحة أحدهما وضرب الناتج فى عددها ويضم الى الناتج مساحة القاعدة فى حالة ما يراد الحصول على المساحة السطحية الكلية

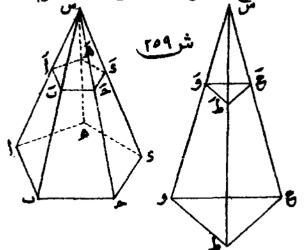
الفصـــــل السادس

فى كثيرات السطوح المحدبة

(٣١٢) متى علمت مساحة الهرم الثلاثى فانه يمكن بواسطتها الحصول على مساحة أى كثير سطوح محدب معلوم وذلك لانه مهما كان كثير السطوح المحدب المعلوم فانه يمكن تقسيمه الى اهرامات ثلاثية بواسطة مستقيمات تصل بين أحد رؤسه وسائر رؤسه الاخر ولنتكلم الآن عن بعض أحوال خصوصية يكون للمساحة فيها قانون بسيط

دعوى نظـــــرية

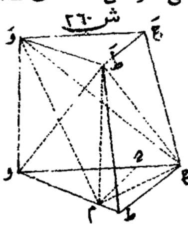
(٣١٣) اذا قطع أى هرم بمستو موازلقاعدته وحذف الهرم الاصغر فان الهرم الناقص الباقى يتركب من ثلاثة اهرامات متحدة معه فى الارتفاع وأما قواعدها فهى قاعدتا الهرم الناقص العليا والسفلى والوسط المتناسب بينهما



ليكن سـ ا ب حـ ء هـ (شكل ٢٥٩) هرما مقطوعا بالمستوى اَ بَ حَـ ءَ هَـ الموازى لقاعدته وليكن سَـ و ع ط هرما آخر ثلاثيا متحدا مع الاول فى الارتفاع ومكافئا له فى القاعدة ثم يفرض وجود قاعدتيهما فى مستو واحد فاذا مد المستوى القاطع اَ بَ حَـ ءَ هَـ فانه يحدد على الهرم الثانى القطع وَ عَ طَ الذى يكون بعده عن مستوى القاعدة مساويا بالضرورة لبعد القطع اَ بَ حَـ ءَ هَـ عن مستوى القاعدة ا ب حـ ء هـ وحينئذ يكون القطعان متكافئين وبناء عليه يكون الهرمان سـ اَ بَ حَـ ءَ هَـ و سَـ وَ عَ طَ متكافئين أيضا لتكافئ قاعدتيهما واتحادهما فى الارتفاع فاذا حذفا من الهرمين الكليين كان الباقيان وهما الهرمان الناقصان ا ب حـ ء هـ اَ بَ حَـ ءَ هَـ و و ع ط وَ عَ طَ متكافئين واذن فيكفى البرهنة على منطوق النظرية على الهرم الثانى الناقص فنقول

ليكن و ع ط وَ عَ طَ الهرم الثانى الناقص المعلوم (شكل ٢٦٠) فنتصور بالنقط الثلاثة و و ع و طَ تمر بمستو فانه يحدد أحد الاهرامات الثلاثة الثلاثية طَ و ع ط لانه متحد

مع الهرم الناقص المذكور فى الارتفاع وقاعدته القاعدة السفلى له و ط ع فاذا حذف هذا الهرم من الهرم الكلى فالباقى بعد ذلك يكون هرما رباعيا رأسه طَ وقاعدته و ع وَ عَ ثم اذا تصورنا أيضا مرور مستو بالنقط الثلاثة وَ و عَ و طَ فان هذا الهرم الرباعى ينقسم الى هرمين ثلاثيين أحدهما طَ وَ عَ ع وثانيهما طَ وَ ع و أما الاول فانه يمكن اعتبار رأسه ع وقاعدته وَ عَ طَ وهو متحد مع الهرم الناقص فى الارتفاع وقاعدته القاعدة العليا له واذن فهو ثانى



الاهرامات الثلاثية الثلاثة وأما الثانى فهو يكافئ الهرم الذى رأسه م وقاعدته وَ ع و لاتحادهما فى القاعدة وفى الارتفاع لوجود رأسيهما طَ و م على مستقيم مواز للقاعدة غير أن هذا الهرم الاخير يمكن اعتبار رأسه وَ وقاعدته ع و م وهو هرم متحد مع الهرم الناقص فى الارتفاع فاذا برهن على أن قاعدته ع و م وسط متناسب بين القاعدتين و ع ط و وَ طَ عَ ثبت المطلوب ولذلك يقال يمد من نقطة م المستقيم م د موازيا ط ع فيكون المثلث و م د = المثلث وَ عَ طَ ثم يؤخذ من المثلثين و ع ط و و ع م المتحدين فى الارتفاع أن

$$\frac{\text{و ع ط}}{\text{و ع م}} = \frac{\text{و ط}}{\text{و م}}$$

وكذا يؤخذ من المثلثين و ع م و و د م المتحدين فى الارتفاع أن

$$\frac{\text{و م ع}}{\text{و م د}} = \frac{\text{و ع}}{\text{و د}} = \frac{\text{و ط}}{\text{و م}}$$

ومن هذين التناسبين ينتج

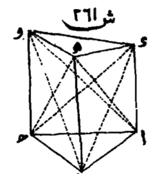
$$\frac{\text{و ع ط}}{\text{و ع م}} = \frac{\text{و ع م}}{\text{و م د}} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{و ع ط}}{\text{و ع م}} = \frac{\text{و ع م}}{\text{وَ عَ طَ}}$$ وهو المراد

نتيجة — اذا رمزنا بالرمزين ن و نَ لقاعدتى الهرم الناقص و ع لارتفاعه تحصل

$$\text{مساحة الهرم الناقص} = \frac{\text{ع}}{3}\left(\text{ن} + \text{نَ} + \sqrt{\text{ن نَ}}\right)$$

دعوى نظريه

(٣١٤) كل منشور ثلاثى ناقص يتركب من ثلاث اهرامات ثلاثية متحدة جميعها معه فى القاعدة السفلى وأما رؤسها فهى رؤس القاعدة العليا له (شكل ٢٦١)



لكن ا ب ح د هـ و المنشور الثلاثي الناقص المعلوم

أولا ـ المستوى هـ ح ا يفصل من الجسم الهرم ا هـ ح ب وهو أحد الاهرامات الثلاثة الثلاثية والباقي بعد حذفه هو الهرم الرباعي هـ و د ا ح الذي ينقسم بالمستوى د هـ ح الى هرمين ثلاثيين

ثانيا ـ الهرم هـ د ا ح يكافئ الهرم ب د ا ح لاتحادهما في القاعدة د ح ا ولوجود رأسيهما على المستقيم هـ ب الموازي للقاعدة فيكونان متحدين في الارتفاع غير ان هذا الهرم الثاني يمكن اعتبار رأسه د وقاعدته ا ب ح وهو ثاني الاهرامات الثلاثية

ثالثا ـ الهرم هـ د و ح يكافئ الهرم ب د و ح وهذا يمكن اعتبار رأسه د وقاعدته و ح ب لكن هذا الاخير يكافئ الهرم ا و ح ب لاتحادهما في القاعدة والارتفاع وهو يمكن اعتبار رأسه و وقاعدته ا ب ح وهو الهرم الثالث

نتيجة ١ ـ اذا كانت الاحرف و ح , هـ ب , د ا عمودية على مستوى القاعدة ب ح فان المساحة الجسمية للمنشور الناقص تساوي $\frac{1}{3}$ ا ب ح × و ح + $\frac{1}{3}$ ا ب ح × هـ و + $\frac{1}{3}$ ا ب ح × د ا أو تساوي $\frac{1}{3}$ ا ب ح (و ح + هـ ب + د ا)

أو اذا رمز بالرمز ن لقاعدة المنشور وبالرموز ع و عَ و عً للارتفاعات و ح و هـ ب و د ا يحدث

المساحة الجسمية للمنشور الناقص = $\frac{ن}{3}$ (ع + عَ + عً) = $\frac{ن(ع + عَ + عً)}{3}$

نتيجة ٢ ـ اذا لم تكن الاحرف عمودية على مستوى القاعدة ا ب ح كما في (شكل ٢٦٢) فانه يقطع المنشور بمستوٍ عمودي على أحرفه فينقسم بذلك الى منشورين ناقصين د هـ و ع ط ي و ا ب ح ع ط ي أحرفها عمودية على مستوى القاعدة المشتركة ويحدث بناء على ما تقرر في النتيجة الاولى أن

مساحة و د هـ ع ط ي = ع ط ي $\left(\frac{و ي + هـ ط + د ع}{3}\right)$

ومساحة ا ب ح ع ط ي = ع ط ي $\left(\frac{ي ح + ط ب + ع ا}{3}\right)$

وتكون المساحة الكلية للمنشور الناقص ا ب ح د هـ و =
ع ط ي $\left(\frac{و ح + هـ ب + د ا}{3}\right)$

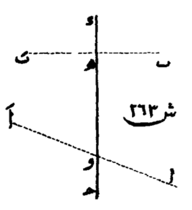
أعنى ان المساحة الجمية للمنشور الناقص تساوى حاصل ضرب القطع العمودى على أحرفه فى ثلث مجموع أحرفه الثلاثة

الفصل السابع

فى التماثل

تعاريف

(٣١٥) النقطتان المتماثلتان بالنسبة لمستقيم هما اللتان يكون المستقيم الواصل بينهما عمودا على مستقيم التماثل ومنقسما به الى قسمين متساويين (شكل ٢٦٣) ويسمى مستقيم التماثل بمحور التماثل



الشكل حـ المماثل للشكل و المعلوم بالنسبة لمحور تماثل هو محل النقط المماثلة لنقط الشكل و بالنسبة لهذا المحور

(٣١٦) النقطتان المتماثلتان بالنسبة لنقطة تماثل هما اللتان يكون المستقيم الواصل بينهما مارا بنقطة التماثل ومنقسما بها الى قسمين متساويين شكل ٢٦٤ ونقطة التماثل هذه تسمى بمركز التماثل

الشكل حـ المماثل للشكل و المعلوم بالنسبة لمركز تماثل هو محل النقط المماثلة لنقط الشكل و بالنسبة لهذا المركز

(٣١٧) النقطتان المتماثلتان بالنسبة لمستو هما اللتان يكون المستقيم الواصل بينهما عمودا على مستوى التماثل ومنقسما بنقطة تقابله به الى قسمين متساويين (شكل ٢٦٦) ويسمى المستوى المذكور بمستوى التماثل

الشكل حـ المماثل لآخر معلوم بالنسبة لمستوى تماثل هو محل النقط المماثلة لنقط الشكل و بالنسبة لهذا المستوى

---

* دعوى نظرية

* (٣١٨) الشكلان المتماثلان بالنسبة لمحور تماثل متساويان (شكل ٢٦٣)

* ليكن ا و ب و ... الخ نقط الشكل و المعلوم و اَ و بَ و ... الخ النقط
* المماثلة لها من الشكل وَ و حء محور التماثل
* فاذا فرضنا ارتباط الشكل وَ بمحور التماثل ودورناه حوله بمقدار زاويتين قائمتين فان
* المستقيم اَو العمودى على محور التماثل لا يزال فى أثناء الدوران وبعده عموداعليه وحينئذ
* فينطبق على مساويه و ا وبعين هذا السبب ينطبق أيضا بَو على و ب وهكذا
* واذن فتنطبق جميع نقط الشكل وَ على مماثليها من الشكل و بعد دورة مقدارها قائمتان
* واذن فلا يكون الشكل وَ شيأ آخر خلاف الشكل و

* دعوى نظـــــرية

* (٣١٩) الشكلان المماثلان لثالث بالنسبة لمركزى تماثل مختلفين متساويان (شكل ٢٦٤)
* ليكونا م و مَ مركزى تماثل مختلفين و ا
* و ب و ... الخ نقط الشكل و و اَ و
* بَ و ... الخ النقط المماثلة لها من الشكل
* وَ المماثل للشكل و بالنسبة لمركز التماثل
* م و اً و بً و ... الخ النقط المماثلة لها
* أيضا من الشكل وً المماثل للشكل و بالنسبة
* لمركز التماثل مَ والمطلوب البرهنة على أن
* الشكلين وَ و وً متساويان

* فيقال حيث ان المستقيم م مَ جامع بين وسطى الضلعين ا اَ و ا اً من المثلث ا اَ اً
* فيكون موازيا اَ اً ومساويا نصفه وكذا يكون موازيا بَ بً ومساويا نصفه وهكذا
* وحينئذ اذا أعطى الشكل وً حركة انتقالية بحيث ترسم جميع نقطه مستقيمات موازية
* م مَ ومساوية ضعفه فان جميع نقطه تنطبق على المناظرة لها من الشكل وَ وبناء عليه
* فالشكلان متساويان وهو المراد

* نتيجة ١ — ينتج من هذه النظرية ان تعيين الشكل المماثل لآخر لا يرتبط بمركز تماثل معين
* نتيجة ٢ — يمكن أن يستنتج مما ذكر مقدار عظيم من النتائج المهمة وهى
* أولا — الشكل المماثل لمستقيم معلوم ا ب هو مستقيم مساوله وتكون هذه النظرية
* بديهية اذا اختير مركز التماثل وسط المستقيم

* ثانيا ـ الشكل المماثل لزاوية هو زاوية مساوية لها وتكون هذه النظرية بديهية اذا اختير
* رأس الزاوية مركز التماثل
* ثالثا ـ الشكل المماثل لكثير أضلاع هو كثير أضلاع مساوله وتنتج هذه النظرية من
* سابقتها
* رابعا ـ الشكل المماثل لمستو هو مستو وتكون هذه النظرية واضحة بنفسها اذا اختير
* مركز التماثل على المستوى
* خامسا ـ الشكل المماثل لزاوية زوجية هو زاوية زوجية مساوية لها وتكون هذه
* النظرية بديهية اذا اختير مركز التماثل على حرف الزاوية الزوجية
* سادسا ـ الشكل المماثل لزاوية مجسمة كثيرة الاوجه هي زاوية أخرى مجسمة كثيرة الاوجه
* تكون جميع أجزائها متساوية غير انها مخالفة فى ترتيب الوضع

---

* دعوى نظـــــرية

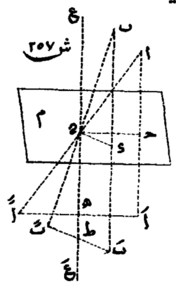
* (٣٢٠) الشكلان المماثلان لثالث بالنسبة لمستويي تماثل مختلفين متساويان (شكل ٢٦٥)
* ليكونا ع و ك مستويي التماثل و ا و ب و ... الخ
* النقط المختلفة من الشكل و و اَ و بَ و ... الخ
* النقط المناظرة لها من الشكل وَ المماثل للشكل و بالنسبة
* لمستوى التماثل ع و اً و بً و ... الخ النقط المناظرة
* للنقط الاولى ايضا من الشكل وً المماثل للشكل و بالنسبة
* لمستوى التماثل ك ويطلب البرهنة على ان الشكلين
* وَ و وً متساويان

ش ٢٦٥

* فيقال اذا مررنا مستويا بالمستقيمين ا اَ و ا اً فانه يكون عمودا على المستويين ع و ك
* واذن فيكون عمودا على خط تقاطعهما وبذلك تكون زاوية ع هـ ك مقاس الزاوية
* الزوجية الواقعة بين المستويين ع و ك ثم اذا وصل هـ ا و هـ اَ و هـ اً فان
* المثلث هـ ا اَ يكون متساوى الساقين وتكون نقطة حـ وسط المستقيم ا اَ واذن
* تكون زاوية ع هـ ا = زاوية ع هـ اَ وكذا حيث ان المثلث ا هـ اً متساوى الساقين
* ونقطة حَ فى وسط الضلع ا اً تكون زاوية ك هـ ا = زاوية ك هـ اً وحينئذ
* تكون زاوية بَ هـ بً = ٢ ع هـ ك = ٢ ع هـ ك وهكذا

* اذا تقرر هذا وفرض ارتباط الشكل وً بالمستوى ك ثم صار تدوير هذا المستوى حول
* نقطة هـ المشتركة بمقدار زاوية تساوى ضعف الزاوية الواقعة بين المستويين فان جميع
* نقط الشكل وً مثل أً و بً و ... الخ تنطبق على النقط أَ و بَ و ... الخ
* المناظرة لها من الشكل وَ واذن فالشكلان وَ و وً متساويان وهو المراد
* نتيجة ١ — ينتج مما ذكر ان تعيين الشكل المماثل لآخر لا يرتبط بمستوى تماثل معين
* نتيجة ٢ — يمكن أن يستنتج مما تقدم مقدار عظيم من النتائج المهمة وهى
* أولا — الشكل المماثل لمستقيم هو مستقيم مساوله وتظهر بداهة هذه النظرية اذا اشتمل
* مستوى التماثل على المستقيم
* ثانيا — الشكل المماثل لزاوية هو زاوية مساوية لها وتظهر بداهة هذه النظرية اذا اعتبر
* مستوى التماثل نفس مستوى الزاوية
* ثالثا — الشكل المماثل لمضلع هو مضلع مساوله وتظهر بداهة هذه النظرية اذا اعتبر
* مستوى التماثل نفس مستوى المضلع
* رابعا — الشكل المماثل لمستو هو مستو وتكون هذه النظرية بديهية اذا اعتبر المستوى
* المعلوم مستوى التماثل
* خامسا — الشكل المماثل لزاوية زوجية هو زاوية زوجية مساوية لها وتسهل البرهنة
* على ذلك اذا اعتبر المستوى المنصف لها مستوى التماثل

دعوى نظـــــرية



* (٣٢١) الشكلان المماثلان لثالث أحدهما
* بالنسبة لمستو وثانيهما بالنسبة لنقطة متساويان
* (شكل ٢٦٦)
* ليكن م مستوى التماثل وحيث ان اختيار مركز
* التماثل لا يرتبط به تعيين الشكل المماثل فنأخذه
* فى نقطة د على المستوى م وليكن ا و ب و ... الخ
* نقط الشكل و و أَ و بَ و ... الخ النقط
* المناظرة لها من الشكل وَ المماثل للشكل و بالنسبة
* للمستوى م و أً و بً ... الخ النقط المناظرة

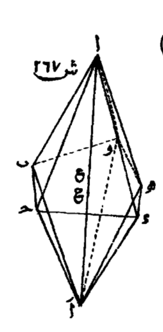
* للاولى أيضا من الشكل وً المماثل للشكل و بالنسبة لمركز التماثل د فنمد من نقطة
* د المستقيم ع عَ عمودا على المستوى م ثم نصل د حـ ، ا اً فمن حيث ان المستقيم
* ع عَ عمود على المستوى فيكون موازيا ا اَ وحينئذ فيكون موجودا بتمامه فى المستوى
* ا اَ اً ولتكن هـ النقطة التى يتقابل فيها مع اَ اً ومن حيث ان نقطتى د ، حـ
* موجودتان فى منتصفى المستقيمين ا اً ، ا اَ فيكون المستقيم اَ اً موازيا د حـ
* وبناء عليه يكون عمودا على ع عَ ومن جهة أخرى حيث كانت د منتصف ا اً وكان
* ع عَ موازيا ا اَ تكون نقطة هـ فى منتصف اَ اً وبناء عليه فيكون النقطتان
* اَ ، اً متماثلتين بالنسبة لمحور التماثل ع عَ وينطبق هذا البرهان على نقط أخرى
* متناظرة من الشكلين وَ ، وً ويكون الشكلان المذكوران متماثلين بالنسبة لمحور
* التماثل ع عَ واذن فهما متساويان (٣١٨)
* نتيجة ١ — ينتج من هذه النظرية ومن المتقدمتين عليها ان أى شكل لا يكون له الا شكل
* واحد مماثل له ولا يجاد هذا الاخير ينتخب اما مستو أو نقطة للتماثل تكون موافقة للاعمال
* المقتضى اجراؤها
* نتيجة ٢ — يمكن استنتاج نظرية (نمرة ٣٢٠) من هذه النظرية لانه اذا كان الشكلان
* وَ ، وً مماثلين للشكل و بالنسبة للمستويين ع ، ل واعتبرنا الشكل وً المماثل
* للشكل و بالنسبة لمركز التماثل د فيكون مماثلا لكل واحد من الشكلين وَ ، وً
* واذن فيكونان متساويين

---

* دعوى نظـــــــرية

* (٣٢٢) كثيرا السطوح المتماثلان يكون فيهما
* أولا — الاوجه المتناظرة متساوية — وثانيا — زواياهما الزوجية المتناظرة متساوية
* وثالثا — أحرفهما المتناظرة متساوية — ورابعا — تكون زواياهما المجسمة مركبة
* من أجزاء متساوية موضوعة فى جهات متضادة
* وهذه النظرية تنتج مما سبق ذكره من ان الشكل لا يكون له الا شكل واحد مماثل له فقط
* ومن النتائج التى ذكرت (بنمرتى ٣١٩ و ٣٢٠ نتيجة ٢)
* نتيجة — كثيرا السطوح المتماثلان يتركبان من عدد واحد من الاهرامات الثلاثية المتماثلة
* لانه اذا تشكل من أربع نقط من الشكل وهرم ثلاثى فان النقط المماثلة لها من الشكل وً
* يتركب منها هرم ثلاثى أيضا

دعوى نظـــــــرية



* (٣٢٣) كثيرا السطوح المتماثلان متكافئان (شكل ٢٦٧)
* أولا — نفرض هرما معلوما ا ب حـ ء هـ و ونرسم الهرم
* المماثل له بجعل قاعدته ب حـ ء هـ و مستوى التماثل فيتشكل
* من ذلك الهرم اَ ب حـ ء هـ و المتحـد مع الاول فى القاعدة
* وفى الارتفاع لان ا ع = اَ ع فيكونان متكافئين
* ثانيا — حيث ان كثيرى السطوح المتماثلين يتركبان من
* عـدد واحـد من الاهرامات الثلاثية المتماثلة فهـما اذن
* متكافئان

* الفصـــل الثـامن

* فى التشـابه

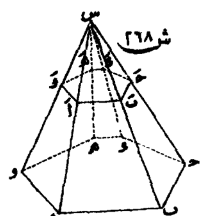
* تعـاريف

* (٣٢٤) كثيرا السطوح المتشابهان هـما اللذان تكون أوجههما المتناظرة متشابهـة
* وزواياهـما المجسمة المتناظرة متساوية ونعـنى هنـا بالزوايا المجسمة المتناظرة الزوايا المجسمة
* المتشكلة من الاوجه المتناظرة المتشابهة وتسمى رؤس زوايا هذه المجسمات بالرؤس المتناظرة
* والمستقيمات الواصلة بين رؤس متناظرة تسمى بالمستقيمات المتناظرة والاوجه المتناظرة هى
* الاوجـه التى تكون متشابهة والزوايا الزوجيـة المتناظرة من كثيرى السطوح المتشابهين
* متساوية
* (٣٢٥) حيث ان الزوايا المجسمة المتناظرة متساوية على مقتضى تعريف تشابه كثيرى
* السطوح فتكون الاجزاء المتساوية فيهما موضوعة على ترتيب واحد واذن فتكون الاوجه
* المتناظرة من كثيرى السطوح المتشابهين موضوعة على نظم وترتيب واحد

* دعوى نظـــــــرية

* (٣٢٦) اذا قطع هرم بمستو مواز لقاعدته فانه يحـدد عليه هرما جـديدا مشابهـا للاول
* (شكل ٢٦٨)

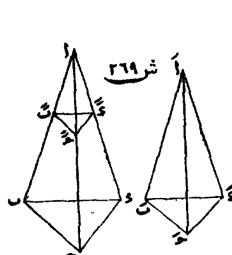
* فاذا قطع الهرم س ا ب ح ء ه و بمستو مواز قاعدته فانه يبرهن على ان الهرم
* س اَ بَ حَ ءَ هَ وَ مشابه للاول
* ولذلك يقال — أولا انه بناء على ما تقدم (بنمرة ٣٠٩)
* تكون أوجه الهرمين متشابهة النظير لنظيره
* ثانيا — ان فيهما الزاوية المجسمة س مشتركة
* ولكون الزوايا المستوية المناظرة من المجسمتين
* ا , اَ متساوية وموضوعة على ترتيب واحد تكونان
* متساويتين وكذا يتساوى فيهما باقى الزوايا المجسمة
* المناظرة أى ان ب = بَ , ح = حَ , ء = ءَ
* وهكذا وبناء عليه فيكون الهرمان متشابهين (٣٢٤)



---

* دعوى نظـــــــرية

* (٣٢٧) يتشابه الهرمان الثلاثيان اذا تساوى منهما زاويتان زوجيتان متناظرتان وكانتا
* محصورتين بين أوجه متشابهة فيهما وموضوعة على ترتيب واحد (شكل ٢٦٩)
* اذا كانت الزاوية الزوجية ا ب تساوى
* الزاوية الزوجية اَ بَ وكان الوجه ا ب ح
* مشابها للوجه اَ بَ حَ والوجه ا ب ء
* مشابها للوجه اَ بَ ءَ يكون الهرمان
* متشابهين
* وللبرهنة على ذلك يؤخذ البعد اً بً = البعد
* اَ بَ ويمر من نقطة بً مستو موازٍ للقاعدة
* ب ح ء فالهرم الثلاثى اً حً ءً يكون
* على مقتضى النظرية السابقة مشابها للهرم
* ا ب ح ء وبناء عليه فقد آل الامر الى البرهنة على أن الهرم اً حً ءً مساويا للهرم
* اَ بَ حَ ءَ وللوصول الى ذلك يقال ان المثلثين اً حً , اَ بَ حَ فيهما اً بً = اَ بَ
* عملا والزاوية بً اً حً = بَ اَ حَ فرضا والزاوية اً بً حً = ا ب ح = اَ بَ حَ
* فرضا أيضا واذن فهما متساويان وبمثل ذلك يبرهن على تساوى المثلثين اً ءً , اَ بَ ءَ



* وحيث كانت الزاوية الزوجية أ بَ تساوى الزوجية أ ب فرضا فيكون الهرمان
* الثلاثيان أ بَ حَ ءَ ، أ بَ حَ ءَ متساويين
* نتيجة - يمكن ارتكانا على هذه النظرية وعلى ما قيل فى تعريف كثيرات السطوح المتشابهة
* أن يبرهن على النظريات الآتية وهى
* الاولى - يتشابه الهرمان الثلاثيان اذا تناسبت أحرفهما المتناظرة وتشابهت وضعا
* الثانية - يتشابه الهرمان الثلاثيان اذا شابه وجه من أحدهما نظيره من الآخر وكانت
* الزوايا الزوجية الثلاثة المجاورة له مساوية لنظائرها من الثانى ومتشابهة وضعا
* الثالثة - يتشابه الهرمان الثلاثيان اذا تساوت فيهما جميع الزوايا الزوجية المتناظرة
* وتشابهت وضعا

---

* دعوى نظـــــرية

* (٣٢٨) كثيرا السطوح المركبان من عدد واحد من الاهرامات الثلاثية المتشابهة صورة
* ووضعا متشابهان أعنى أن أوجههما المتناظرة متشابهة و زواياهما المجسمة المتناظرة
* متساوية (شكل ٢٧٠)
* ليكن ط ا ب ح ، ط ا ء ح ،
* ط ح ء و ، ط ء هـ و ، ... الخ
* الاهرامات المتركب منها كثير
* السطوح الاول ، طَ اَ ءَ حَ
* ، طَ حَ ءَ وَ ، طَ ءَ هَ وَ ، ... الخ
* الاهرامات المتركب منها كثير
* السطوح الثانى

شكل ٢٧٠

* أولا - المثلثان ء ح ا ، ا ح ب المتركب منهما الوجه ا ب ح ء من كثير السطوح
* الاول يشابهان مع التناظر المثلثين ءَ حَ اَ ، اَ حَ بَ الموجودين على سطح كثير السطوح
* الثانى بسبب تشابه الاهرامات الثلاثية وزيادة على ذلك حيث ان المثلثين ء ح ا ، ا ح ب
* موجودان فى مستو واحد فيجب أن يكون المثلثان ءَ حَ اَ ، اَ حَ بَ كذلك
* وللبرهنة على ذلك يقال حيث ان الهرمين الثلاثيين ط ح ا ء ، ط ا ب ح يشابهان
* الهرمين طَ حَ اَ ءَ ، طَ اَ بَ حَ فرضا فتكون الزاويتان الزوجيتان ط ح ا ء

* و ط ح ا ب مساويين بالتناظر للزوجيتين ط َ ح َ أ َ ء َ ، ط َ ح َ أ َ ب َ وحيث كان مجموع
* الاولتين مساويا قائمتين فيكون مجموع الاخريين كذلك وبناء عليه فيكون كثيرا الاضلاع
* ا ب ح ، أ َ ب َ ح َ ء َ متشابهين لتركبهما من عدد واحد من المثلثات المتشابهة صورة ووضعا
* وبمثل ذلك يبرهن على تشابه باقي أوجه كثيري السطوح مأخوذة مثنى
* ثانيا — يشاهد أن الزوجية ط ا التي هي مجموع الزوجيتين ح ط ا ء ، ح ط ا ب
* تساوي الزاوية الزوجية ط َ ا َ مجموع الزوجيتين ح َ ط َ ا َ ء َ ، ح َ ط َ ا َ ب َ وعلى العموم
* كل زوجيتين متناظرتين من كثيري السطوح متساويتان لانها عبارة عن مجموع زوايا
* زوجية متناظرة متساوية ومن ذلك ينتج أن الزوايا المجسمة المتناظرة متساوية مثل ا ، ا َ
* لتساوي الزوايا المستوية فيهما المتناظرة ولتشابهها وضعا مع تساوي ميولها على بعضها

دعوى نظـــــرية

* (٣٢٩) وبالعكس — كثيرا السطوح المتشابهان يتركبان من عدد واحد من الاهرامات
* الثلاثية المتشابهة صورة ووضعا (شكل ٢٧٠)
* اذا اعتبرنا ط رأسا لكثير السطوح ا ب ح ء هـ و ح ط وقسمنا أوجهه الغير المجاورة
* للرأس ط الى مثلثات واعتبرنا كل واحد منها قاعدة لهرم ثلاثي رأسه ط فان كثير السطوح
* المذكور ينقسم الى اهرامات ثلاثية يتكون من مجموعها الجسم المذكور
* ولو أجرينا مثل ذلك في كثير السطوح الثاني فاننا نشاهد انقسامهما الى عدد واحد من
* الاهرامات الثلاثية ولم يبق علينا سوى البرهنة على أن كل اثنين منها متناظرتين في الجسمين
* متشابهان
* ولذلك يقال اذا قارنا الهرم الثلاثي ط ء ح ا بالهرم الثلاثي ط َ ء َ ح َ ا َ نشاهد فيهما أن
* المثلثين ط ء ا ، ح ء ا يشابهان بالتناظر للمثلثين ط َ ء َ ا َ ، ح َ ء َ ا َ بسبب تشابه
* الوجهين هـ ء ا ط ، هـ َ ء َ ا َ ط َ من جهة والوجهين ح ء ا ب ، ح َ ء َ ا َ ب َ من
* جهة أخرى وأن الزاوية الزوجية ء ا = الزاوية الزوجية ء َ ا َ فرضا وحينئذ فيكون
* الهرمان المذكوران متشابهين (٣٢٧)
* ثم اذا انتقلنا الى الهرمين الثلاثيين ط ء ح و ، ط َ ء َ ح َ و َ نشاهد فيهما تشابه المثلثين
* ط ء ح ، ط َ ء َ ح َ لانهما وجهان متناظران من هرمين ثلاثيين متشابهين وكذا نشاهد
* تشابه الوجه و ء ح للوجه و َ ء َ ح َ بسبب تشابه كثيري الاضلاع و هـ ء ح ، و َ هـ َ ء َ ح َ

* وغيرذلك فان الزوجيتين و ء ح ا ، وَ ءَ حَ اَ متساويتان فرضا والزوجيتان ط ء ح ا
* و طَ ءَ حَ اَ متساويتان بسبب تشابه الهرمين ط ء ح ا ، طَ ءَ حَ اَ واذن يكون
* الهرمان الثلاثيان ط ء ح و ، طَ ءَ حَ وَ متشابهين وهكذا

* تنبيه ١ — ومما يجب ملاحظته هنا هو أن التحليل المتقدم يمكن اجراؤه باعتبار أى رأسين
* متناظرين من كثيرى السطوح غير الرأسين ط ، طَ كأنهما رأسان للجسمين
* تنبيه ٢ — ينتج من هذه النظرية أن النسبة بين أى مستقيمين متناظرين ا ، اَ مثلا
* واصلين بين رأسين متناظرين من كل من كثيرى السطوح المتشابهين هى كالنسبة بين أى
* حرفين ب ، بَ متناظرين فيهما وذلك لان المستقيمين المذكورين لابد أن يكونا حرفين
* متناظرين من هرمين ثلاثيين متشابهين عند تحليل كثيرى السطوح الى اهرامات ثلاثية
* متشابهة وحيث ان هذين الهرمين لابد أن يشتملا على حرفين متناظرين ح ، حَ مثلا
* من كثيرى السطوح فيحدث $\frac{ا}{اَ}=\frac{ح}{حَ}$ وحيث ان أحرف كثيرى السطوح متناسبة
* فرضا لانهما متشابهان يكون $\frac{ح}{حَ}=\frac{ب}{بَ}$ أو $\frac{ا}{اَ}=\frac{ب}{بَ}$ وهو المراد

دعوى نظرية

* (٣٣٠) النسبة بين الهرمين الثلاثيين المتشابهين كالنسبة بين مكعبى حرفين متناظرين
* منهما (شكل ٢٧١)

ش ٢٧١

* حيث ان الهرمين المذكورين متشابهان فانه يمكن
* وضع أصغرهما على الاكبر بحيث تكون الزاوية
* المجسمة س مشتركة بينهما واذن فتكون القاعدة
* اَ بَ حَ موازية للقاعدة ا ب ح لانقسام الاحرف
* س ا ، س ب ، س ح الى أجزاء متناسبة فى
* النقط اَ ، بَ ، حَ ثم يقال اذا رمزنا بالرمزين
* ع ، عَ لحجمى الهرمين ، ى ، ىَ لقاعدتيهما
* حدث

$$ع=\frac{1}{٣}ى\times س و \quad ، \quad عَ=\frac{1}{٣}ىَ\times س وَ \quad أو$$

$$\frac{ع}{عَ}=\frac{ى\times س و}{ىَ\times س وَ}=\frac{ى}{ىَ}\times\frac{س و}{س وَ}$$

* وحيث ان القاعدتين ن و نَ متشابهتان يكون

* $\frac{ن}{نَ} = \frac{\overline{اب}^٢}{\overline{اَبَ}^٢}$ وكذا يؤخذ مما تقدم ان $\frac{س و}{سَ وَ} = \frac{اب}{اَبَ}$ واذن يكون $\frac{ح}{حَ} = \frac{\overline{اب}^٣}{\overline{اَبَ}^٣}$

* وهو المراد

دعوى نظــــــرية

* (٣٣١) النسبة بين كثيرى السطوح المتشابهين كالنسبة بين مكعبى حرفين متناظرين منهما
* من المعلوم ان كثيرى السطوح المتشابهين يتركبان من عدد واحــد من الاهرامات الثــلاثية
* المتشابهــة صورة ووضعا فاذا دلت الرموز هـ و هـَ و هـً و هـٌ و ... الخ على
* اهرامات كثــير السطوح الاول و ى و ىَ و ىً و ىٌ و ... الخ على اهرامات
* كثــير السطوح الثانى و ا و اَ و اً و اٌ و ... الخ على أحرف الاهرامات
* الاولى و ب و بَ و بً و بٌ و ... الخ على الاحرف المناظرة لها من الثانية حدث

* $\frac{هـ}{ى} = \frac{١^٣}{ب^٣}$ و $\frac{هـَ}{ىَ} = \frac{اَ^٣}{بَ^٣}$ و $\frac{هـً}{ىً} = \frac{اً^٣}{بً^٣}$ و $\frac{هـٌ}{ىٌ} = \frac{اٌ^٣}{بٌ^٣}$ و ... الخ

* وحيث ان الاحرف المتناظرة من كثيرى السطوح متناسبة يحدث

* $\frac{هـ}{ى} = \frac{هـَ}{ىَ} = \frac{هـً}{ىً} = \frac{هـٌ}{ىٌ} = ...$ أو

* $\frac{هـ + هـَ + هـً + هـٌ + ... الخ}{ى + ىَ + ىً + ىٌ + ... الخ} = \frac{هـ}{ى} = \frac{١^٣}{ب^٣}$ أو $\frac{ح}{حَ} = \frac{١^٣}{ب^٣}$ وهو المراد

الفصــــــل التاســـع

تمـــــرينات

١ ـ المطلوب تعيين قطر متوازى المستطيلات اذا كانت مقادير أحرفه الثلاثة المجاورة هى
ا = ٤٫٢٠ متر و ب = ٠٫٨٠ متر و ح = ٠٫٦٠ متر

٢ ـ المطلوب البرهنة على أن قطر المكعب يساوى حاصل ضرب أحد أحرفه فى $\sqrt{٣}$

٣ ـ ما مقدار زنة الهواء الموجود فى أودة طولها ٥ متر وعرضها ٤ متر وارتفاعها ٣٫٢٠ متر
اذا كان الليتر الواحد من الهواء يزن ١٫٢٩ غراما

٤ ـ اذا دل عدد ١٦٫٦٠٤ مترا مكعبا على مساحة متوازى مستطيلات والمطلوب معرفة أبعاده الثلاثة اذا علم انها متناسبة للمقادير $\frac{1}{8}$ و $\frac{5}{4}$ و $\frac{5}{6}$

٥ ـ اذا كان مقدار قطر احد أوجه المكعب مساويا ٤ متر والمطلوب حساب مساحته الجميه

٦ ـ اذا ملئ اناء على شكل مكعب من الكؤل وكانت زنتهما معا تعادل ٥٢٫٦٨٨ كيلوغراما و زنة الاناء وحده تعادل كيلوغرامين والمطلوب معرفة عمق هذا الاناء اذا كانت كثافة الكؤل هى ٠٫٧٩٢

٧ ـ ما مساحة حجم المنشور الثلاثى الذى ارتفاعه ٥ متر وقاعدته مثلث متساوى الاضلاع طول ضلعه ٥ متر

٨ ـ اذا كانت قاعدة منشور ثلاثى مثلثا متساوى الاضلاع ضلعه ح وكان ارتفاعه ضعف ارتفاع المثلث المذكور المعتبر قاعدة والمطلوب ايجاد قانون مساحته الجميه

٩ ـ المطلوب تعيين مساحة حجم المنشور الذى ارتفاعه ٣ متر وقاعدته مربع مرسوم داخل دائرة نصف قطرها متران

١٠ ـ اذا كان ارتفاع هرم يساوى ١٥ مترا ومساحة قاعدته تساوى ١٦٩ مترا مربعا فعلى أى بعد من رأسه يجب قطع هذا الهرم بمستو موازلقاعدته بحيث تكون مساحة القطع تساوى ١٠٠ مترا مربعا

١١ ـ اذا ساوت مساحة قاعدة هرم ١٤٤ مترا مربعا وقطع بمستو موازلقاعدته على بعد أربعة أمتار من رأسه وكانت مساحة القطع الحادث تساوى ٦٤ مترا مربعا فما مقدار طول ارتفاع الهرم

١٢ ـ اذا دل عدد ١٢ متر على ارتفاع هرم قاعدته مربع ضلعه ٨ أمتار فما مقدار مساحة القطع الحادث له من مستو موازلقاعدته على بعد أربعة أمتار من رأسه

١٣ ـ اذا دل عدد ١٤ متر على الارتفاع المشترك لهرمين قاعدة الاول مربع طول ضلعه ٩ متر وقاعدة الثانى مسدس طول ضلعه ٧ متر فما مقدار مساحتى القطعين الحادثين لهذين الهرمين اذا قطع كل منهما بمستو موازلقاعدته على بعد ستة أمتار من رأسه

١٤ ـ اذا دل عدد ٨ متر على طول أحد أحرف هرم وأخذ عليه بالابتداء من الرأس بعد يساوى خمسة أمتار ومد من نهاية هذا البعد مستو موازلقاعدة الهرم والمطلوب معرفة النسبة الكائنة بين السطحين الجانبين للهرمين الاصغر والكامل

١٥ — المطلوب تقويم هرم ثلاثى منتظم من الفضة طول حرفه يساوى ٠٫٠٦ متر (كثافة الفضة هى ١٠٫٤٧ وقيمة الكيلوغرام الواحد منها يعادل ٢٢٠٫٥٥ فرنكا)

١٦ — المطلوب ايجاد المساحة الجمية لهرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٦ متر وطول أحد أحرفه ٥ متر

١٧ — اذا كانت قاعدة هرم شكلا مسدسا منتظما طول أحد أضلاعه ٣ متر والمطلوب أولا معرفة الارتفاع اللازم اعطاؤه لهذا الهرم حتى تكون مساحته السطحية عشرة أمثال مساحة القاعدة وثانيا معرفة المساحة الجمية له

١٨ — اذا كان قاعدتا هرم ناقص شكلين مسدسين منتظمين ضلع احدهما متر واحد وضلع الثانى متران والمطلوب حساب ارتفاع الهرم اذا كانت مساحته الجمية تساوى ١٢ مترا مكعبا

* ١٩ — ما مقدار طول حرف المكعب الذى تكون مساحته الجمية ضعف مساحة مكعب
* معلوم طول حرفه ٥ متر

* ٢٠ — اذا فرض هرم ناقص قاعدتاه شكلان مثمنان منتظمان وطول أحد أضلاع القاعدة
* العليا ٠٫٤ متر وطول أحد أضلاع القاعدة السفلى ٠٫٣ متر وارتفاع الهرم
* الناقص ٠٫٥ متر والمطلوب معرفة حجم الهرم الكامل

* ٢١ — المطلوب معرفة حجم الهرم الناقص الذى ارتفاعه ٠٫٩ متر وقاعدتاه شكلان مثمنان
* منتظمان ضلع احداهما ٠٫٨ متر وضلع الثانية ٠٫٥ متر

(تم الجزء الثالث من كتاب التحفة البهية ويليه الجزء الرابع ان شاء الله تعالى)

فهرســة الجزء الثالث من التحفة البهية

صحيفة

(تمت)

الجـــزء الرابـــع

من كتاب التحفة البهيـــة فى الاصول الهندسـيـة

وهو مقرر الدروس الهندسية لتلامذة السنة الرابعة بمدرسة التجهيزية

تأليف

حضرة احمـد بك قطيم

ناظـر مدرسـة دار العـلوم وقـلم الترجـمه

(تنبيــــه)

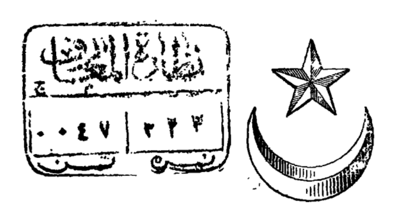
وان كان ذكرنا فى خطبة الكتاب فى الجزء الاوّل ان الزيادات تميز عن الاصل بكتابتها بحروف دقيقة غير أن مقتضيات الاحوال أوجبت تميزها بوضع نجوم قبلها فى أوائل السطور فليتنبه

(الطبعة الاولى)

بالمطبعة الكبرى الاميرية ببولاق مصر المحميــة

ســنة ١٣٠٦

هجرية



بسم الله الرحمن الرحيم

الجزء الرابع

فى الاجسام المستديرة والقطاعات المخروطية والمنحنى البريمى

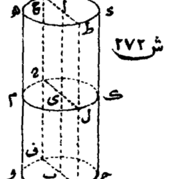
الباب الاول

فى الاجسام المستديرة

الفصل الاول

فى الاسطوانة

(٣٣٢) الاسطوانة القائمة هى جسم يتولد من دوران مستطيل مثل ا ب ح د حول ضلع ثابت من أضلاعه ا ب مثلا يسمى محور الاسطوانة



(شكل ٢٧٢)

ضلعا المستطيل ا د و ب ح العمودان على المحور واللذان لايزالان كذلك أثناء الدوران وبعده يرسمان دائرتين متساويتين مركزاهما ا و ب على المحور ومستوياهما عمودان عليه تسميان بقاعدتى الاسطوانة وأما ارتفاعها فهو المحور

حيث ان كل نقطة مثل ك من نقط ضلع المستطيل د ح الموازى للمحور ا ب ترسم أثناء الدوران محيط دائرة مثل ك ل م ن مركزه ى على المحور ومستويه عمود عليه ونصف قطره مساو لنصف قطر القاعدة أمكن أن يقال

كل مستو يوازى قاعدة الاسطوانة فانه يقطعها فى دائرة مساوية للقاعدة

وأما المستوى القاطع لها المار بمحورها فانه يقطعها فى مستطيل مثل ح ط ع ف يكون ضعف المستطيل الاصلى

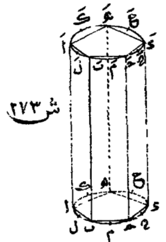
(٣٣٣) السطح المنحنى الذى يتولد من دوران الضلع د ح يسمى بالسطح الجانبى للاسطوانة

ويمكن تصور تولد هذا السطح على وجه العموم من حركة مستقيم يتكئ دائما على خط ثابت بالتوازى لاتجاه معين ويسمى المستقيم المتحرك براسم أو بمولد السطح والخط الثابت بالدليل

اذا كان الدليل مستقيما كان السطح المتولد مستويا وحينئذ يكون السطح المستوى حالة خصوصية من السطح الاسطوانى

نظـــــرية

(٣٣٤) المساحة السطحية الجانبية للاسطوانة تساوى حاصل ضرب محيط قاعدتها فى ارتفاعها (شكل ٢٧٣)



السطح الجانبى للاسطوانة وان كان منحنيا ولا يتيسر مقارنته مباشرة بوحدة السطوح المستوية لكننا نتوصل للمطلوب باعتباره النهاية التى يقرب منها السطح الجانبى لمنشور منتظم امام رسوم داخل الاسطوانة أو خارجها متى تزايد عدد أوجهه الى غير نهاية

غير انه لا يكون هذا الاعتبار حقيقيا الا اذا برهنا على وجود تلك النهاية وعلى انها غير مرتبطة لا بنوع معين من أنواع المناشير المرسومة داخل الاسطوانة أو خارجها ولا بقانون تضعيف الاوجه

ولذلك يقال اذا رسمنا داخل قاعدة الاسطوانة وخارجها شكلين منتظمين متحدين فى عدد الاضلاع ن ومددنا من رؤس هذين المضلعين مستقيمات موازية للمحور ومنتهية بمستوى القاعدة العليا فاننا نتوصل بذلك الى منشورين منتظمين أحدهما داخل الاسطوانة والثانى خارجها ثم اذا رمزنا بالرمزين حَ و حً لمحيطى الشكلين المنتظمين المذكورين وبالرمزين

سَ و سً للسطحين الجانبيين للمنشورين وبالرمز ع لارتفاعهما المشترك تحصل
(٣٠٨ تنبيه) ان   سَ = حَ ع و سً = حً ع
لكنه حيث قد علم مما سبق انه متى ازداد ن الى غير نهاية فان حَ و حً يقربان معا من نهاية
مشتركة لهما محصورة دائما بين أى مقدارين متقابلين من مقدارى حَ و حً وغير مرتبطة
لابعدد ن ولا بقانون تضعيفه وهى طول محيط الدائرة
وكذا حيث ان نهاية حاصل ضرب عدة مضاريب مساوية لحاصل ضرب نهايات مضاريبه تحصل

نهاية سَ = نهاية حَ × ع ونهاية سً = نهاية حً × ع

واذن فيكون للمقدارين سَ و سً نهاية مشتركة س ليست مرتبطة لابعدد الاوجه
ولا بقانون تضعيفها وهى   س = محيط القاعدة × ع
نتيجة ـ اذا جعل نق رمزا لنصف قطر محيط القاعدة يكون قانون المساحة السطحية
الجانبية للاسطوانة هو س = ٢ ط نق ع

نظـــــــــرية

(٣٣٥) المساحة الحجمية للاسطوانة تساوى حاصل ضرب قاعدتها فى ارتفاعها
حجم الاسطوانة وان كان محدد السطح منحنيا ولا يمكن مقارنته مباشرة بوحدة الاحجام غير انا نتوصل
الى المطلوب باعتبار النهايات فننشئ داخل الاسطوانة وخارجها منشورين منتظمين متحدين
فى عدد الاوجه ونرمز لحجميهما بالرمزين مَ و مً ولقاعدتيهما بالرمزين قَ و قً ولحجم
الاسطوانة وقاعدتها بالرمزين م و ق ثم نقول
من المعلوم ان م أكبر من مَ لاشتماله عليه وأصغر من مً لانحصاره فيه لكنه يحدث (٣٠٨)

مَ = قَ × ع و مً = قً × ع

فاذا ازداد عدد الاوجه فى هذين المنشورين الى غير نهاية فان قَ و قً يقربان من نهاية
مشتركة ق وهى قاعدة الاسطوانة وحينئذ يكون للمقدارين مَ و مً نهاية مشتركة ق ع
ويكون حجم الاسطوانة م المحصور بين مَ و مً هو تلك النهاية ويحدث م = ق ع
نتيجة ـ اذا أبدل ق بمقداره تحصل قانون المساحة الحجمية للاسطوانة وهو م = ط نق٢ ع
تنبيه ـ يمكن تطبيق جميع ما ذكر من البراهين مع السهولة على أى اسطوانة مائلة قاعدتها
دائرة

الفصـــــل الثـــانى

فى المخـــــروط

(٣٣٦) المخروط القائم هو جسم يتولد من دوران مثلث قائم الزاوية مثل س ا ب حول ضلع ثابت منـه س ب مثلا من ضلعى القائمـة يسمى محور المخروط (شكل ٢٧٤)

ش ٢٧٤

الضلع الثانى ا ب للزاوية القائمـة العمودى على المحور والذى لا يزال كذلك أثناء الدوران وبعـده يرسم دائرة مركزها على المحور ومستويها عمود عليـه تسمى بقاعدة المخروط

وأما ارتفاعه فهو المحور

حيث ان أى نقطة مثل ط من نقطة الضلع س ب ترسم محيط دائرة مثل ط ك و ى مركزها ع على المحور ومستويها عمود عليه أمكن أن يقال

كل مستو موازلقاعدة المخروط يقطعه فى دائرة

(٣٣٧) السطح المنحنى المتولد من دوران وتر المثلث س ب يسمى بالسطح الجانبى للمخروط وأما نقطة المحور الثابتة س التى يمر بها الوتر دائما فتسمى رأس المخروط

ويمكن تصور تولد السطح المخروطى على وجه العموم من حركة مستقيم يمر دائما بنقطة ثابتة ويتكئ على خط ثابت أيضا فالمستقيم المتحرك يسمى براسم أو بمولد سطح المخروط وأما الخط الثابت فهو الدليل

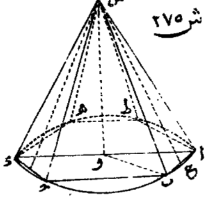
اذا كان الدليل مستقيما كان السطح المتولد مستويا وحينئذ يكون المستوى حالة خصوصية من السطح المخروطى

نظـــــرية

(٣٣٨) المساحة السطحية الجانبية للمخروط تساوى نصف حاصل ضرب محيط قاعدته فى حرفه الجانبى (شكل ٢٧٥)

ولو أن السطح الجانبى للمخروط منحن ولا يمكن مقارنته مباشرة بوحدة السطوح المستوية لكن أمكن مع ذلك التوصل الى المقصود بواسطة اعتباره النهاية التى يقرب منها السطح الجانبى لهرم منتظم امامرسوم داخل المخروط أو خارجه متى تزايد عدد أوجهه الى غير نهاية

لكنه لاجل أن يكون هذا الاعتبار حقيقيا يجب ان يبرهن كما سبق فى الاسطوانة على وجود تلك النهاية وانها ليست مرتبطة لا بنوع من أنواع الاهرام المرسومة داخل المخروط أو خارجه ولا بقانون تضعيف الاوجه



ولذلك يقال اذا رسمنا داخل قاعدة المخروط شكلا منتظما عدد أضلاعه ن ومحيطه ع َ وخارجها شكلا آخر منتظما متحدا مع الاول فى عدد الاضلاع ومحيطه ع ً ثم وصل بين رأس المخروط وبين جميع رؤس هذين المضلعين بمستقيمات فانه يتشكل من ذلك هرمان منتظمان أحدهما داخل المخروط والثانى خارجه وأوجه كل واحد منهما هى مثلثات متساوية ومتساوية الساقين والارتفاع المتحد المقدار فى مثلثات الهرم الاول الداخل هو س ح والارتفاع المتحد المقدار فى مثلثات الهرم الخارج هو س ا فاذا رمز بالرمزين س َ و س ً للسطحين الجانبيين للهرمين المذكورين تحصل على مقتضى ما تقرر بنمرة (٣١١ نتيجة ١) أن

$$\text{س َ} = \frac{1}{2}\,\text{ع َ} \times \text{س ح} \quad ,\quad \text{س ً} = \frac{1}{2}\,\text{ع ً} \times \text{س ا}$$

فاذا أخذ العدد ن فى الزيادة الى غير نهاية فمن حيث ان ع َ يقرب بناء على هذا الفرض من نهايته وهى محيط الدائرة التى نصف قطرها و ا وأن س ح يقرب أيضا من نهايته س ا (لان س ا ـ س ح < ا ح فكلما أخذ ن فى الزيادة قرب ا ح من الصفر) فيقرب السطح س َ بناء عليه من نهاية س

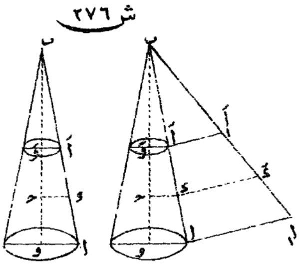
وكذا من حيث انه بناء على الفرض المتقدم يقرب ع ً من عين النهاية التى يقرب منها ع َ فتكون نهاية المقدارين السابقين واحدة وهى س وهى كما لا يخفى غير مرتبطة لا بعدد الاوجه ن ولا بالقانون المتبع فى زيادته الى غير نهاية ويكون مقدارها هو $\frac{1}{2}$ محيط و ا × س ا

نتيجة ـ اذا رمز بالرمز نق لنصف قطر القاعدة وبالرمز ا للحرف الجانبى لسطح المخروط يكون قانون المساحة السطحية الجانبية للمخروط هو س = ط نق ا

تنبيه ـ اذا مد من وسط الحرف الجانبى مستو مواز لقاعدته فان نصف قطر دائرة القطع يكون مساويا بالضرورة الى نصف قطر القاعدة وبذلك يكون محيط القطع مساويا للنصف محيط القاعدة وبناء عليه فيمكن أخذ المساحة السطحية الجانبية للمخروط بواسطة ضرب حرفه الجانبى فى محيط الدائرة المتوسطة

نظـــــــرية

(٣٣٩) المساحة السطحية الجانبية للمخروط الناقص تساوى نصف مجموع محيطى قاعدتيه فى حرفه الجانبى (شكل ٢٧٦)



(اذا قطع المخروط بمستو موازٍ قاعدته فان جزء المخروط المحصور بين المستوى القاطع والقاعدة يسمى مخروطاً ناقصاً)

ليكن و وَ اَ ا المخروط الناقص و ب رأس المخروط الاصلى فاذا أقيم من نقطة ا المستقيم ا إ عموداً على ا ب فى مستوٍ ما ثم أخذ البعد ا إ مساوياً لطول محيط و ا ووصل ب إ وأقيم أيضاً من نقطة اَ نهاية حرف المخروط الناقص العمود اَ إَ على ا ب ومد حتى يلاقى ب إ فانه يحصل من المثلثات الحادثة المتشابهة أن

$$\frac{اَ إَ}{ا إ} = \frac{ب اَ}{ب ا} = \frac{وَ اَ}{و ا} = \frac{محيط وَ اَ}{محيط و ا}$$

وحيث ان ا إ مساوٍ لمحيط الدائرة و ا يكون اَ إَ مساوياً لمحيط وَ اَ

اذا تقرر هذا يقال حيث ان مساحة المثلث ب ا إ $= \frac{1}{2}$ ا إ × ا ب فهو اذن يكافئ السطح الجانبى للمخروط الذى حرفه ا ب وكذلك حيث ان مساحة المثلث ب اَ إَ $= \frac{1}{2}$ اَ إَ × ب اَ فهو اذن يكافئ السطح الجانبى للمخروط الذى حرفه ب اَ وبناء عليه تكون مساحة شبه المنحرف ا إ إَ اَ مساوية لمساحة السطح الجانبى للمخروط الناقص وحيث ان مساحة شبه المنحرف تساوى نصف مجموع قاعدتيه المتوازيتين فى الارتفاع ا اَ فتكون المساحة السطحية الجانبية للمخروط مساوية لنصف مجموع محيطى قاعدتيه فى حرفه الجانبى وهو المراد

تنبيه — اذا مد من نقطة ى وسط الحرف ا اَ مستوٍ موازٍ لمستويى القاعدتين فانه يحدد على سطح المخروط الناقص محيط دائرة يسمى بالمحيط المتوسط ثم اذا برهن كما سبق على أن طول هذا المحيط مساوٍ للمستقيم المتوسط ى ىَ لشبه المنحرف ا إ إَ اَ ولوحظ أن ى ىَ مساوٍ نصف مجموع قاعدتى شبه المنحرف فيكون المحيط المذكور مساوياً نصف مجموع محيطى القاعدتين

المتوازيتين للمخروط الناقص واذن تكون المساحة السطحية الجانبية للمخروط الناقص مساوية لحاصل ضرب طول المحيط المتوسط فى حرف المخروط الناقص الجانبى

نتيجة ١ — اذا رمز بالحرف س للسطح الجانبى للمخروط الناقص و نق و نقَ لنصفى قطرى القاعدتين و ح لحرفه الجانبى حدث س = ط (نق + نقَ) ح

* نتيجة ٢ — ويمكن الحصول على هذا القانون الاخير بواسطة الاعمال الحسابية فاذادل ا
* على الحرف الجانبى للمخروط الكلى و اَ على حرف المخروط المحذوف و ح على ا — اَ
* حدث

$$\text{س} = \text{ط نق ا} - \text{ط نقَ اَ} = \text{ط (نق ا} - \text{نقَ اَ)}$$

* وحيث ان

$$\frac{\text{ا}}{\text{نق}} = \frac{\text{اَ}}{\text{نقَ}} = \frac{\text{ح}}{\text{نق} - \text{نقَ}} \quad \text{يحدث} \quad \text{ا} = \frac{\text{نق ح}}{\text{نق} - \text{نقَ}} \text{ ، } \text{اَ} = \frac{\text{نقَ ح}}{\text{نق} - \text{نقَ}}$$

* ويكون س = ط (نق + نقَ) وهو عين السابق

نظـــــــريه

(٣٤٠) المساحة الجمية للمخروط تساوى ثلث حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه (شكل ٢٧٥)
حيث ان المخروط محدد بسطح منحن ويتعذر مقارنته مباشرة بوحدة الاحجام فاننا نتوصل الى الغرض باستعمال النهايات فنقول

اذا أنشأنا داخل المخروط وخارجه هرمين م و مَ منتظمين متحدين فى عدد الاوجه وفرض أن قَ و قً رمزان لقاعدتيهما و ع رمز لارتفاعهما المشترك فمن المعلوم أن المخروط م يكون أكبر من مَ لاحتوائه عليه وأصغر من مً لانحصاره فيه غير أن

$$\text{مَ} = \tfrac{1}{3}\text{قَ} \times \text{ع} \text{ ، } \text{مً} = \tfrac{1}{3}\text{قً} \times \text{ع}$$

فاذا ضوعف فى عدد أوجه الهرمين الى غير نهاية ولوحظ ما تقدم ذكره (بنمرة ٣٣٨) من أن قَ و قً يقربان من القاعدة ق فيكون لحجمى الهرمين نهاية مشتركة هى $\tfrac{1}{3}$ ق ع وبناء عليه تكون مساحة المخروط المحصورة دائما بين الحجمين مَ و مً هى تلك النهاية المشتركة ويكون م = $\tfrac{1}{3}$ ق ع وهو المراد

نتيجة — اذا أبدلنا ق بمقداره ط نق² حدث م = $\tfrac{1}{3}$ ط نق² ع

تنبيه — ماسبق ذكره من البراهين يمكن تطبيقه على أى مخروط مائل قاعدته دائرة

نظـــــرية

(٣٤١) المساحة الجمية للمخروط الناقص تكافئ ثلاثة مخاريط متحدة معه فى الارتفاع وقواعدها هى قاعدتا المخروط الناقص والوسط المتناسب بينهما

يجب للوصول الى هذه النظرية البرهنة على أن المخروط الناقص يمكن تحويله الى هرم ناقص يكافئه يكون متحدا معه فى الارتفاع وقاعدتاه تكونان مكافئتين لقاعدتى المخروط الناقص ولذلك يقال اذا رسم مثلث فى مستوى القاعدة السفلى للمخروط الناقص يكون مكافئا لها ثم وصل بين رؤسه الثلاثة و بين رأس المخروط الكامل بمستقيمات فانه يتشكل من ذلك هرم ثلاثى متحد مع المخروط الكلى فى الارتفاع ومكافئ له فى القاعدة فيكون مكافئا له ثم اذا مد مستوى القاعدة العليا للمخروط الناقص فانه يقطع الهرم فى مثلث يشابه مثلث القاعدة فاذا رمز بالرمزين ط و $\text{ط}'$ لهذين المثلثين وبالرمزين ن و $\text{ن}'$ لقاعدتى المخروط الناقص وبالرمزين ع و $\text{ع}'$ لبعديهما عن الرأس تحصل

$$\frac{\text{ط}}{\text{ط}'} = \frac{\text{ع}^2}{\text{ع}'^2} = \frac{\text{ن}}{\text{ن}'}$$

وحيث ان ط و ن متكافئان فرضا فيكون $\text{ط}'$ و $\text{ن}'$ كذلك واذا فيكون الهرم الاصغر والمخروط الاصغر متكافئين و بناء عليه يكون الهرم الناقص والمخروط الناقص متكافئين أيضا

وحيث ان مساحة الهرم الناقص تساوى $\frac{1}{3}\,\text{ذ}\,(\text{ط} + \text{ط}' + \sqrt{\text{ط}\,\text{ط}'})$ (٣١٣ نتيجة) (بفرض أن ذ يدل على ارتفاع الهرم الناقص) فتكون مساحة المخروط الناقص مساوية الى $\frac{1}{3}\,\text{ذ}\,(\text{ن} + \text{ن}' + \sqrt{\text{ن}\,\text{ن}'})$ وهو المراد

نتيجة ١ ــ اذا استعوض ن و $\text{ن}'$ بمقداريهما يحدث

$$\text{م} = \frac{1}{3}\,\text{ط}\,\text{ذ}\,(\text{س}^2 + \text{س}'^2 + \text{س}\,\text{س}')$$

* نتيجة ٢ ــ ويمكن الوصول الى هذا القانون بطريقة حسابية فيقال حيث ان

$$\frac{\text{ع}}{\text{س}} = \frac{\text{ع}'}{\text{س}'} = \frac{\text{ذ}}{\text{س} - \text{س}'}$$

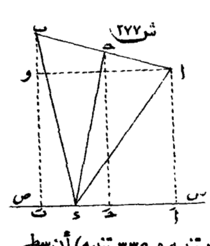
* فاذا جعلنا م_1 و $\text{م}'$ رمزين لحجمى المخروطين الكامل والاصغر و م رمزا للفرق بينهما
* يحدث $\quad \text{م} = \text{م}_1 - \text{م}' = \frac{1}{3}\,\text{ط}\,\text{س}\,\text{ع} - \frac{1}{3}\,\text{ط}\,\text{س}'^2\,\text{ع}'$
* $= \frac{1}{3}\,\text{ط}\,\text{ذ}\,\frac{\text{س}^3 - \text{س}'^3}{\text{س} - \text{س}'} = \frac{1}{3}\,\text{ط}\,\text{ذ}\,(\text{س}^2 + \text{س}'^2 + \text{س}\,\text{س}')$
* وهو عين القانون السابق

الفصـــــــــل الثــالث

فى بعض سطوح وأجسام دورانية

فائـــــــــدة

(٣٤٢) السطح المتولد من قاعدة مثلث متساوى الساقين حول محور مار برأسه يساوى حاصل ضرب محيط الدائرة التى نصف قطرها ارتفاع المثلث فى مسقط القاعدة على المحور (شكل ٢٧٧)



ليكن اب قاعدة المثلث المتساوى الساقين اءب و ص س المحور الذى يدور المثلث حوله و اَبَ مسقط القاعدة اب على المحور ص س و حَ مسقط نقطة ح وسط الضلع اب و او مستقيما موازيا للمحور فمن المعلوم ان السطح المتولد من دوران المستقيم اب حول المحور اما أن يكون سطحا مخروطيا كاملا او ناقصا على حسب ما تكون نقطة ا موجودة على المحور أو متباعدة عنه وعلى كلتا الحالتين يتحصل بناء على ما تقدم (٣٣٨ تنبيه و ٣٣٩ تنبيه) أن سطح

اب = ٢ ط ححَ × اب

غير أن المثلثين المتشابهين اوب و حءحَ يؤخذ منهما أن

$$\frac{\text{ححَ}}{\text{او}} = \frac{\text{حء}}{\text{اب}} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{حَحَ}}{\text{اَبَ}} = \frac{\text{حء}}{\text{اب}}$$

ومنه يتحصل

ححَ × اب = اَبَ حء

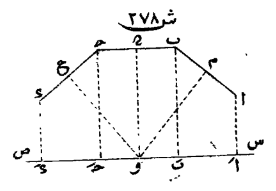
واذن يكون سطح اب = ٢ ط حء × اَبَ وهو المراد

تنبيـــه — اذا وازى المستقيم اب المحور س ص تكون الفائدة بديهية

نظـــــــريه

(٣٤٣) السطح المتولد من دوران جزء من محيط شكل منتظم حول محور مار بمركزه يساوى حاصل ضرب محيط الدائرة المرسومة داخله فى مسقط جزء المضلع المذكور على المحور (شكل ٢٧٨)

ليكن ا ب حـ د جزء المضلع المعلوم الذى مركزه و . و س ص محور الدوران و اَ دَ مسقط جزء المضلع المنتظم ، و م = و ن = و ع



نصف قطر الدائرة المرسومة داخله فعلى مقتضى الفائدة السابقة يحصل

سطح ا ب = ٢ ط م و × اَ بَ و

سطح ب حـ = ٢ ط ن و × بَ حَ و

سطح حـ د = ٢ ط ع و × حَ دَ

وبجمع هذه المتساويات على بعضها يتوصل الى السطح المتولد من دوران جزء المضلع ا ب حـ د ويحدث سطح ا ب حـ د = ٢ ط و م × اَ دَ وهو المراد

تنبيه ـ اذا كان جزء محيط المضلع نصف محيط مسدس منتظم وكان نصف قطر الدائرة المرسومة عليه هو س ونصف قطر الدائرة المرسومة داخله هو سَ فان مساحة السطح المتولد من دورانه تساوى ٢ ط سَ × ٢ س أو = ٤ ط س سَ غير أنه لما كان سَ = س √٣ فتكون المساحة السطحية المذكورة مساوية الى ٢ ط س² √٣ وبمثل ما ذكر يمكن الحصول على مساحة كل سطح متولد من دوران جزء من محيط أى مضلع منتظم سبق دراسته فى الباب الثانى من الجزء الثانى

تعريف

(٣٤٤) اذا اعتبرنا قوساما ا ب من نصف محيط دائرة وكان اَ بَ مسقطه على القطر وتصورنا دوران هذا القوس حول القطر المذكور فان المستقيمين ا اَ و ب بَ المسقطين للنقطتين ا و ب نهايتى القوس المفروض يرسمان ضرورة دائرتين عموديتين على المحور وأما القوس ا ب فانه يرسم سطحا منحنيا محصورا بين مستويى هاتين الدائرتين يسمى منطقة وحينئذ فالمنطقة هى جزء من سطح الكرة محصور بين مستويين متوازيين يسميان قاعدتيها وأما المستقيم اَ بَ الذى يقدر به البعد بين المستويين فهو ارتفاعها

اذا مر أحد نهايتى القوس ا ب بمحور الدوران بان كان أحد المستويين المتوازيين مماسا للكرة فان المنطقة تكون ذات قاعدة واحدة وتسمى فى هذه الحالة طربوشا كرويا

واذا كبر القوس ا ب حتى بلغ نصف محيط بان كان مستويا القاعدتين مماسين للكرة فان المنطقة تصير مساوية فى هذه الحالة لسطح الكرة

نظـــــــرية

(٣٤٥) مساحة المنطقة تساوى حاصل ضرب محيط دائرة عظيمة فى ارتفاعها (شكل ٢٧٩)

ليكن ا د القوس المولد للمنطقة و ا َ د َ مسقطه على المحور م ن فاذا أريد تقويم مساحة المنطقة يقال لما كان هذا السطح منحنيا ولا يمكن مقارنته مباشرة بوحدة السطوح المستوية لزمنا للوصول الى المقصود أن نسلك هنا عين ما سلكناه من قبل فنعتبره النهاية التى يقرب منها السطح المتولد من محيط جزء من شكل منتظم مرسوم اما داخل القوس المولد أو خارجه متى ضوعف فى عدد أضلاعه الى غير نهاية لكنه لاجل أن يكون هذا الاعتبار حقيقيا يجب أن نبرهن كما سبق على وجود تلك النهاية وانها ليست مرتبطة بنوع ما بالقانون المتبع فى رسم المضلعات الداخلة والخارجة

فاذا كان ا ب ح د خطا مضلعا منتظما مرسوما داخل القوس ا د عدد أضلاعه ن وكان ا ب ح د خطا مضلعا آخر منتظما مشابها له مرسوما خارجه بواسطة مد مماسات موازية للاضلاع ا ب ، ب ح ، ح د ، ... الخ فيكون مسقط ا ب ح د هو الخط الثابت ا َ د َ كما لا يخفى وأما مسقط المضلع ا ب ح د فهو الخط المتغير ا َ د َ الذى يفرق عن المسقط ا َ د َ اما بمجموع الخطين ا ا َ ، د د َ أو بالفرق بينهما وحيث ان مسقط أى خط هو أقصر منه غالبا فيفرق اذن المسقط ا َ د َ عن المسقط ا َ د َ بكمية أقل من ا ا + د د غير ان كل واحد من ا ا َ ، د د َ أقل من الفرق و ا — و ا فيكون بداهة أقل من نصف ضلع من أضلاع المضلع الخارج واذن فيفرق ا َ د َ عن ا َ د َ بأقل من ضلع من أضلاع المضلع الخارج ولما كان هذا الفرق يزداد قربا من الصفر كلما زيد فى تضعيف عدد الاضلاع فتكون اذن نهاية ا َ د َ هى ا َ د َ

اذا تقرر هذا وجعلنا س رمز النصف قطر الدائرة الراسمة للمنطقة ، س َ لنصف قطر الدائرة المرسومة داخل المضلع المنتظم ا ب ح د ، س َ رمز السطح المتولد من هذا الخط المضلع المذكور ، س َ رمزا للسطح المتولد من محيط جزء المضلع المنتظم ا ب ح د نحصل على مقتضى النظرية السابقة ان

$$س َ = ٢ ط س َ × ا َ د َ \quad ، \quad س َ = ٢ ط س × ا َ د َ$$

ومتى زيد فى العدد ن الى غير نهاية فان سَ و سً يقربان من نهايتهما المشتركة ٢ ط س أ ءَ المحصورة بينهما الغير المرتبطة بالقانون الذى اتبع فى رسم المضلعات المنتظمة الداخلة والخارجة الآخذ عدد أضلاعهما فى الزيادة وحيث ان تلك النهاية هى المنطقة فتكون مساحتها تساوى

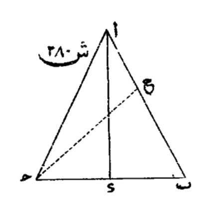
٢ ط س × أ ءَ = ٢ ط س ع وهو المراد

نتيجة - فى كرة واحدة أو فى كرات متساوية النسبة بين أى منطقتين كالنسبة بين ارتفاعيهما

نظـــــــــرية

(٣٤٦) المساحة الجمية للجسم المتولد من دوران مثلث حول محور خارج عنه وموجود معه فى مستو واحد ومار بأحد رؤسه تساوى حاصل ضرب السطح المتولد من الضلع المقابل لتلك الرأس فى ثلث الارتفاع المقابل له

الحالة الاولى (شكل ٢٨٠)



نفرض أولا ان أحد أضلاع المثلث ب ح مثلا منطبق على المحور فننزل من النقطتين ح و ا العمودين ح ع و اء فالجسم المتولد من دوران المثلث ح ا ب يتركب ضرورة من مخروطين ويحدث

جم ح ا ب = جم ح ا ء + جم ء ا ب

= $\frac{1}{٣}$ ط اءَ٢ (ح ء + ء ب) = $\frac{1}{٣}$ ط اءَ٢ × ب ح

لكنه حيث كان الحاصلان ح ب × اء و ا ب × ح ع متساويين لدلالة كل واحد منهما على شئ واحد وهو ضعف مساحة المثلث ا ب ح أمكن أن يوضع

جم ح ا ب = $\frac{1}{٣}$ ط اء × ا ب × ح ع

ومن جهة أخرى حيث ان السطح المتولد من دوران الضلع ا ب هو سطح مخروطى ومساحته تساوى ط اء × ا ب فبالاستعواض يحدث

جم ح ا ب = سطح ا ب × $\frac{1}{٣}$ ح ع وهو المراد

الحالة الثانية (شكل ٢٨١)

نفرض ان الضلع ب ح غير منطبق على المحور وانما امتداد الضلع ا ب المقابل للرأس ح يقابله فى نقطة د فيكون الجسم المتولد من دوران المثلث ا ب ح مساويا فى هذه الحالة للفرق بين الجمين المتولدين من دوران المثلثين ح ا د , ح ب د ويحدث

حجم ا ب ح = حجم ح ا د − حجم ح ب د

= سطح ا د × ١/٣ هـ ح − سطح ب د × ١/٣ هـ ح

= سطح ا ب × ١/٣ هـ ح وهو المطلوب

الحالة الثالثة (شكل ٢٨٢)

نفرض ان الضلع ا ب المقابل للرأس ح موازٍ للمحور ففى هذه الحالة لا يتأتى تطبيق البرهنة المتقدمة لعدم موافقتها غير انه يحدث

حجم ا ب ح = حجم ا ح هـ + حجم ا هـ د ب

− حجم ح ب د ويكون

حجم ا ب ح = ١/٣ ط ح و² × ح هـ + ط ح و² × هـ د

− ١/٣ ط ح و² × ح د أو

= ١/٣ ط ح و² (ح هـ + ٣ هـ د − ح د) = ١/٣ ط ح و² × ٢ هـ د

= ٢ ط ح و × هـ د × ١/٣ ح و = سطح ا ب × ١/٣ ح و وهو المراد

نظـــــــرية

(٣٤٧) مساحة الجم المتولد من دوران قطاع قاعدته خط مضلع منتظم تساوى حاصل ضرب السطح المتولد من قاعدته مضروبا فى ثلث نصف قطر الدائرة المرسومة داخله (شكل ٢٨٣)

ليكن ا ب ح د الخط المضلع المنتظم قاعدة القطاع و د ا , و هـ نصف قطر الدائرة المرسومة داخله فانه يمكن تحليل القطاع المذكور الى جملة مثلثات متساوية

الساقين ومتساوية وعلى مقتضى النظرية المتقدمة تحصل المساحة الجمية المتولدة من كل واحد منها وحاصل جمعها يدل على المساحة الجمية المطلوبة

جم و ا د = سطح ا ب × $\frac{1}{٣}$ هـ و + سطح ب حـ × $\frac{1}{٣}$ هـ و

+ سطح حـ د × $\frac{1}{٣}$ هـ و = سطح ا ب حـ د × $\frac{1}{٣}$ هـ و وهو المراد

نتيجة ـ المساحة الجمية للجسم المتولد من دوران نصف مسدس منتظم حول قطره تكون بناء على ماذكر

م = سطح ا ب حـ د × $\frac{1}{٣}$ س = ٢ ط س^{٢} √٣ × $\frac{1}{٢}$ س √٣ = ط س^{٣}

وبمثل ماذكر يسهل الحصول على مساحة كل جم متولد من دوران جزء من مضلعات أخرى منتظمة يكون معلوم فيها أحد الاضلاع ونصف قطر الدائرة المرسومة داخله

تعريف

(٣٤٨) القطاع الكروى هو جزء من جسم الكرة يتولد من دوران قطاع دائرى فهو يتكئ اذن على منطقة

اذا آل القطاع الدائرى الى نصف دائرة فان القطاع الكروى يكون مساويا لجم الكرة

نظرية

(٣٤٩) المساحة الجمية للقطاع الكروى تساوى حاصل ضرب المنطقة قاعدته فى ثلث نصف القطر (شكل ٢٨٣)

وللوصول الى ذلك يقال ولو انه يتعذر مقارنته مباشرة بوحدة الاجسام لانه محدد بسطح منحن لكنا مع ذلك نتوصل الى الغرض باستعمال النهايات

فنرسم داخل القوس ا د خطا مضلعا منتظما ا ب حـ د عدد أضلاعه ن ونرسم آخر خارجه مشابها للاول ا$_١$ ب$_١$ حـ$_١$ د$_١$ (ولم يرسم منهما الا الداخل فقط) ثم نجعل مَ رمزا للحجم المتولد من ا ب حـ د و مً رمزا للحجم المتولد من ا$_١$ ب$_١$ حـ$_١$ د$_١$ و م رمزا للحجم المتولد من القطاع ثم نقول

ان الجم م أكبر من الجم مَ لاشتماله عليه وأصغر من الجم مً لانحصاره فيه لكنه يحدث على مقتضى النظرية السابقة ان

مَ = سطح ا ب حـ د × $\frac{1}{٣}$ و هـ و مً = سطح ا$_١$ ب$_١$ حـ$_١$ د$_١$ × $\frac{1}{٣}$ و ا

وقد سبق البرهنة على أن السطحين المتولدين من ان حد و إب حء لهما نهاية مشتركة وهي المنطقة وكذا علم مما تقدم أيضا ان نهاية وهـ هي وا فيكون اذن للمقدارين مَ و مً نهاية مشتركة وحيث ان م محصور بينهما فيكون هو تلك النهاية ويحدث

م (القطاع الكروى) = المنطقة قاعدته × $\frac{1}{3}$ س وهو المراد

نتيجــة — اذا أبدلت المنطقه بمقدارها المتقدم (٣٤٥) يحدث

م = $\frac{2}{3}$ ط س٢ ع (ع ارتفاع المنطقة)

تعـــــريف

(٣٥٠) الحلقة الكروية هي جزء من جسم الكرة تتولد من دوران قطعــة دائرية محصورة بين قوس ووتره

نظـــــرية

(٣٥١) المساحة الجمية لحلقة كروية تساوى سدس الدائرة التي نصف قطرها وتر القطعة مضروب في مسقط هذا الوتر على محور الدوران (شكل ٢٨٤)

ليكن ب م ء القطعة الدائرة حول المحور أ ع وليكن ب ء وترها و هـ و مسقطه على المحور فمن المعلوم ان الجم المتولد من القطعــة مساو للفرق بين الجمين المتولد احدهــما من القطاع حـ ء م ب وثانيهما من المثلث حـ ء ى ب غيران

جم حـ ء م ب = $\frac{2}{3}$ ط س٢ × هـ و (٣٤٩) و

جم حـ ء ى ب = $\frac{2}{3}$ ط $\overline{حـ ى}^2$ × هـ و (٣٤٦)

وباجراء الطرح يحدث

جم ب م ء = $\frac{2}{3}$ ط (س٢ — $\overline{حـ ى}^2$) هـ و = $\frac{2}{3}$ ط $\overline{ب ى}^2$ × هـ و

= $\frac{1}{6}$ ط $\overline{ب ء}^2$ × هـ و وهو المراد

الفصـــل الرابـــع

فى الكـرة

نظـــــرية

(٣٥٢) المساحة السطحية للكرة تساوى أربع دوائر عظام

وللبرهنة على ذلك يقال حيث انه تقدم (بنمرة ٣٤٤ تعريف) ان المنطقة تؤل الى سطح الكرة متى آل القوس المولد لها الى نصف محيط دائرة أو آل ارتفاعها الى قطر الكرة فاذا أبدل فى قانون المنطقة ٢ ط س × ع (٣٤٥) الارتفاع ع بالمقدار ٢ س تحصل سطح الكرة $=$ ٢ ط س × ٢ س $=$ ٤ ط س^{٢} وهو المراد

* نتيجة — حيث قد علم مما سبق ان المثلث الكروى القائم الزوايا الثلاث هو ثمن الكرة
* (٢٦٩ نتيجة) فتكون مساحته تساوى $\frac{١}{٢}$ ط س^{٢} أعنى نصف دائرة عظيمة
* تنبيه — حيث ان مساحة المثلث الكروى القائم الزوايا الثلاث قد علمت بالنسبة للمربع
* المأخوذ وحدة فيتيسر اذن معرفة النسبة الكائنة بين مساحة أى مضلع كروى و بين هذا
* المربع متى علمت زواياه

نظـــــرية

(٣٥٣) المساحة الجمية للكرة تساوى أربعة أثلاث النسبة ط فى مكعب نصف قطرها أو تساوى سدس النسبة فى مكعب قطرها

وللبرهنة على ذلك يقال حيث انه تقدم (بنمرة ٣٤٨) ان القطاع الكروى يؤل الى جسم الكرة متى آل القطاع الدائرى المولد له الى نصف دائرة وفى هذه الحالة تؤل المنطقة قاعدته الى سطح الكرة وبناء عليه اذا أبدل فى قانون القطاع المنطقة بسطح الكرة تحصل

حجم الكرة $=$ سطح الكرة × $\frac{١}{٣}$ س $=$ ٤ ط س^{٢} × $\frac{١}{٣}$ س $=$ $\frac{٤}{٣}$ ط س^{٣} او $=$ $\frac{١}{٦}$ ط ق^{٣}

وهو المراد

---

* تعـــــريف

* (٣٥٤) الضلع الكروى هو جزء من جسم الكرة محصور بين نصفى دائرتين عظيمتين وكل
* ضلع كروى تكون قاعدته شقة

* ## نظـــــرية

* (٣٥٥) مساحة الضلع الكروى تساوى حاصل ضرب الشقة قاعدته فى ثلث نصف القطر
* وللبرهنـــة على ذلك يقال اذا جعــل أ رمز الزاوية الضلع الكروى منسوبة الى الزاوية
* القائمة فانه يحدث بداهة ان

* $$\frac{\text{الضلع الكروى}}{\text{حجم الكرة}} = \frac{\text{أ}}{\text{٤ قائمة}}$$ أو

* $$\text{الضلع الكروى} = \frac{٤}{٣} ط س^٣ \times \frac{\text{أ}}{\text{٤ قائمة}} = ٤ ط س^٢ \times \frac{\text{أ}}{\text{٤ قائمة}} \times \frac{س}{٣}$$

* لكن المقدار ٤ ط س٢ × $\frac{\text{أ}}{\text{٤ قائمة}}$ أو سطح الكرة × $\frac{\text{أ}}{\text{٤ قائمة}}$ يدل بداهة على سطح الشقة

* فتكون مساحة الضلع الكروى مساوية الى الشقة × $\frac{س}{٣}$ وهو المطلوب

---

* ## تعـــــريف

* (٣٥٦) اذا وصــل بين مركز الكرة ورؤس مضلع كروى بمستقيمات فانه يتشكل من ذلك
* مايسمى بالهرم الكروى

---

* ## نظـــــرية

* (٣٥٧) المساحة الجمية للهرم الكروى تساوى حاصــل ضرب سطح قاعدته فى ثلث نصف
* قطر الكرة

* الحالة الاولى ــ اذا كان الهرم ثلاثيا فانه يسهل البرهنة

* أولا ــ على أن الهرمين الثلاثيين المتماثلين متكافئان لامكان تركيبهما من اهرامات ثلاثية
* متساوية ذات الوجهين المتساويين كما أجرى ذلك فى المثلثين الكرويين

* ثانيا ــ على أنه اذا تقاطع دائرتان عظيمتان فى نصف كرة واحدة فالهرمان الحادثان اللذان
* فيهما زاويتان زوجيتان متساويتان مشتركان فى الحرف يكون مجموعهما مساويا الضلع
* الكرة المنسوبة اليه احدى الزاويتين الزوجيتين المذكورتين لان الهرم المماثل لاى الهرمين
* المذكورين يكمل ضلع الكرة الذى يكون الهرم الثانى جزأ منه

* اذا تقرر هذا وأعيدت البراهين التى سبق ايرادها عند تقويم المساحة السطحية للمثلث
* الكروى (٢٧٦) على الهرم الثلاثى الكروى تحصل

$$\text{هرم ثلاثى كروى} = \frac{\text{ضلع ا} + \text{ضلع ب} + \text{ضلع ح}}{٢} - \frac{١}{٤}\ \text{كره}$$

* وعلى ما تقرر (بنمرة ٣٥٥) يحدث

$$* \quad \text{هرم ثلاثى كروى} = \left(\frac{\text{شقة ا} + \text{شقة ب} + \text{شقة ح} - \text{شقة قائمة}}{٢}\right) \times \frac{\text{نق}}{٣}$$

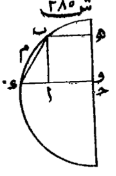
* وحيث ان الكمية الموجودة بين القوسين تدل على مساحة المثلث الكروى قاعدة الهرم
* الثلاثى (٢٧٦) يحدث

$$* \quad \text{هرم ثلاثى كروى} = \text{القاعدة} \times \frac{\text{نق}}{٣} \quad \text{وهو المطلوب}$$

* الحالة الثانية — اذا كان الهرم أيا كان فانه يمكن تقسيمه الى اهرامات ثلاثية وبأخذ
* مسائحها وضمها الى بعضها يتوصل الى المطلوب
* نتيجة — اذا وصل بين مركز الكرة وجميع نقط دائرة صغيرة بمستقيمات تكون من ذلك
* ما يسمى بالمخروط الكروى
* ويسهل البرهنة بطريق النهايات على أن المساحة الجمية له تساوى حاصل ضرب قاعدته
* فى ثلث نصف القطر

نظـــــرية

(٣٥٨) المساحة الجمية للقطعة الكروية تساوى مساحة الكرة التى قطرها ارتفاع القطعة زائدا مساحة الجسم الاسطوانى المتحد مع القطعة فى الارتفاع وقاعدته نصف مجموع قاعدتى القطعة (شكل ٢٨٥)



ليكن المطلوب تقويم المساحة الجمية المتولدة من دوران شبه المنحرف هـ ب م د و الذى أحد أضلاعه منحن حول المحور هـ و

عند ذلك ب ا موازيا للمحور فالحجم المطلوب يكون مساويا بالضرورة لمجموع الجمين المتولد أحدهما من القطعة الدائرية ب م د وثانيهما من شبه المنحرف هـ ب د و فيحدث

$$\text{حجم ب م د} = \frac{١}{٦}\,ط\,\overline{\text{ب د}}^{٢} \times \text{هـ و} \quad (٣٥١) \quad \text{و}$$

$$\text{حجم هـ ب د و} = \frac{١}{٣}\,ط\left(\overline{\text{ب هـ}}^{٢} + \overline{\text{د و}}^{٢} + \text{ب هـ} \times \text{د و}\right)\text{هـ و} \quad (\text{٣٤١ نتيجة ١})$$

وبالجمع يحدث

$$\text{حجم القطعة} = \frac{1}{6} ط \left(\overline{ب ى}^{2} + 2\ \overline{ب هـ}^{2} + 2\ \overline{ى و}^{2} + 2 ب هـ \times ى و\right) \times هـ و$$

ويؤخذ من المثلث القائم الزاوية ب أ ى أن

$$\overline{ب ى}^{2} = \overline{هـ و}^{2} + (ى و - ب هـ)^{2} = \overline{هـ و}^{2} + \overline{ى و}^{2} + \overline{ب هـ}^{2} - 2 ى و \times ب هـ$$

وباستعواض $\overline{ب ى}^{2}$ من القانون السابق بما يساويه يحدث

$$\text{حجم القطعة} = \frac{1}{6} ط \left(\overline{هـ و}^{2} + 3\ \overline{ى و}^{2} + 3\ \overline{ب هـ}^{2}\right) \times هـ و$$

ومع التحليل والاختصار يحدث

$$\text{حجم القطعة} = \frac{1}{6} ط\ \overline{هـ و}^{3} + \frac{1}{2} ط \left(\overline{ى و}^{2} + \overline{ب هـ}^{2}\right) هـ و$$ وهو المراد

نتيجـــة ــ اذا انعدمت احدى القاعدتين بأن كانت القطعة ذات قاعـدة فقط فان المساحة الحجمية لها تساوى الكرة التى قطرها ارتفاع القطعة زائد نصف الاسـطوانة المتحدة مع القطعة فى القاعدة والارتفاع

نظـــــــرية

(٣٥٩) نسبة سطح الكرة الى السطح الكلى للاسطوانة المرسومة عليها كالنسبة بين العـددين ٢ و ٣ والنسـبة بين حجميهما كالنسـبة بين العـددين المذكورين (شكل ٢٨٦)

شكل ٢٨٦

لكن م ل ن ك دائرة عظيمـة و أ ب حـ ى مربعا مرسوما خارجها وتصورنا دوران كل من نصف الدائرة ونصف المربع حول المحور ك ل فانه عندما ترسم نصف الدائرة الكرة يرسم نصف المربع الاسطوانة

برهان الاول ــ حيث ان قاعدة الاسـطوانة مساوية دائرة عظيمة وارتفاعها مساو لقطر الكرة فتكون مساحتها السطحية الجانبية مساوية الى ٤ ط $س^2$ ويضم الى ذلك مساحة القاعدتين أو ٢ ط $س^2$ تكون المساحة الكلية لسطح الاسطوانة مساوية الى ٦ ط $س^2$ واذن يكون

$$\frac{\text{سطح الكرة}}{\text{سطح الاسطوانة}} = \frac{4\ ط\ س^2}{6\ ط\ س^2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

برهان الثانى — يقال ان المساحة الجمية للاسطوانة تساوى ط س٢ × ٢ س = ٢ ط س٣ والمساحة الجمية للكرة تساوى ٤/٣ ط س٣ ويكون

$$\frac{\text{الكرة}}{\text{الاسطوانة}} = \frac{4}{3} : 2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$ وهو المراد

تنبيه — اذا تصورنا جسما كثير السطوح مرسوما على الكرة أى أن جميع أوجهه مماسة لسطحها فان حجمه يتركب من اهرامات تكون رؤسها بمركز الكرة وقواعدها الاوجه المختلفة لكثير السطوح وأما ارتفاعها المشترك فهو مساو لنصف قطر الكرة واذن فيكون حجم كثير السطوح مساويا لسطحه مضروبا فى ثلث نصف القطر وبناء عليه تكون النسبة بين أحجام كثيرات السطوح المرسومة على الكرة كالنسبة بين سطوحها

---

* نظـــــرية

* (٣٦٠) نسبة سطح الكرة الى سطح المخروط المتساوى الاطراف المرسوم عليها (أى الذى
* قطر قاعدته مساو لراسمه) كالنسبة بين العددين ٤ : ٩ والنسبة بين حجميهما كالنسبة بين
* عين هذين العددين (شكل ٢٨٧)
* ليكن م ى ل دائرة عظيمة قد رسم عليها المثلث
* المتساوى الاضلاع ا ب حـ ثم تصورنا دوران نصف
* الدائرة ونصف المثلث معا حول القطر ا م فانه عند
* ما يرسم نصف الدائرة جسم الكرة يرسم نصف المثلث
* م ا حـ مخروطا متساوى الاطراف
* برهان الاول — من المعلوم ان السطح الجانبى للمخروط
* يساوى ط م حـ × ا حـ وباستعواض م حـ , ا حـ
* بمقداريهما س √٣ و ٢ س √٣ يكون السطح الجانبى للمخروط مساويا الى ٦ ط س٢
* واذا أضفنا الى ذلك مساحة القاعدة وهى ٣ ط س٢ يكون السطح الكلى للمخروط مساويا
* الى ٩ ط س٢ ويحدث

$$\frac{\text{سطح الكرة}}{\text{سطح المخروط}} = \frac{4}{9}$$ *

* وأما برهان الثانى وان كان يمكن استنتاجه من تنبيه نمرة (٣٦٠) فمع ذلك نقول ان المساحة
* الجمية للمخروط $= \frac{١}{٣}$ ط $\overline{\text{م ح}}^{٢} \times$ ام لكن $\frac{\text{ام}}{\text{اد}} = \frac{\text{م ح}}{\text{و د}}$ أو $\frac{\text{ا م}}{\text{٣٧ س}} = \frac{\overline{\text{٣٧ س}}}{\text{س}}$ أو
* ام $=$ ٣ س وتكون مساحة جم المخروط مساوية الى ٣ ط س^{٣} أو $\frac{٩}{٣}$ ط س^{٣}
* ويحدث $\frac{\text{الكرة}}{\text{المخروط}} = \frac{٤}{٣} : \frac{٩}{٣} = \frac{٤}{٩}$ وهو المراد

الفصـــــل الخـامس

تمـــــرينات

١ ـ المطلوب تعيين نصف قطر قاعدة اسطوانة اذا كانت مساحتها السطحية الجانبية تساوى ٠٫٦٠ مترا مربعا وكان ارتفاعها مساويا ١٫٢٠ مترا

٢ ـ اذا لزم لطلاء السطح الجانبى لاسطوانة قطر قاعدتها ٠٫٢٠ مترا وارتفاعها ٠٫٨٠ متر مقدار سنتيمترين مكعبين من الذهب والمطلوب معرفة سمك طبقة الطلاء

٣ ـ مايؤل اليه جم الاسطوانة اذا ضوعف ارتفاعها أو نصف قطر قاعدتها

٤ ـ اذا دل العدد ١٩٫٢٦ على الثقل النوعى للذهب وأريد تصنيع عمود بصفائح من الذهب ارتفاعه يساوى ثلاثة أمتار ونصف قطر قاعدته يساوى ٠٫٢٠ مترفا مقدار زنة الذهب اللازم لذلك اذا كان سمك الصفائح يعادل ٠٫٠٠١ متر

٥ ـ المطلوب تعيين زنة الزئبق الموجود داخل اناء اسطوانى قطر قاعدته ٠٫٢٠ مترا وارتفاع الزئبق فيه يعادل ٠٫٤٠ مترا اذا كان الثقل النوعى للزئبق يعادل ١٣٫٦

٦ ـ اذا كانت أنبوبة من الزجاج تزن ٨٠ غراما وهى فارغة ومتى وضع فيها زئبق بارتفاع ٠٫٠٤ متر تبلغ زنتها ١٤٠ غراما والمطلوب معرفة قطر قاعدة الانبوبة اذا كان الثقل النوعى للزئبق يعادل ١٣٫٥٩٨

٧ ـ اذا قطع مخروط ارتفاعه متران ومساحة قاعدته متر مربع بمستو موازٍ قاعدته على بعد ٠٫٨٠ متر من رأسه والمطلوب معرفة سطح القطع

٨ ـ على أى بعد من رأس مخروط ارتفاعه متران ونصف قطر قاعدته ٠٫٤٠ متر يجب قطعه بمستو موازٍ قاعدته ليكون نصف قطر القطع مساويا ٠٫٣٠ متر

٩ ـ مايؤل اليه جم مخروط اذا ضوعف ارتفاعه أو نصف قطر قاعدته

١٠ - اذا كان حجم المخروط يساوى ٦٠ مترا مكعبا وارتفاعه يساوى ثمانية امتار والمطلوب حساب سطحه الجانبي

١١ - اذا كان نصف قطر قاعدة مخروط يساوى مترين وضلعه يساوى ثمانية أمتار والمطلوب حساب حجمه

١٢ - اذا قطع مخروط ارتفاعه خمسة أمتار بمستو مواز قاعدته على بعد مترين من رأسه وكان نصف قطر القطع الحادث مساويا ٠٫٤٠ متر والمطلوب حساب حجمه

١٣ - اذا قطع مخروط ارتفاعه ستة أمتار ومساحته الحجمية عشرة أمتار مكعبة بمستو مواز قاعدته على بعد مترين من رأسه والمطلوب حساب السطح الجانبي للمخروط الناقص

١٤ - على أي بعد من رأس مخروط حجمه يساوى ٣٨٧ مترا مكعبا وارتفاعه ٢٠ مترا يجب قطعه بمستو مواز قاعدته لتكون المساحة الحجمية للمخروط المحذوف مساوية ٩٥ مترا مكعبا

١٥ - اذا كان ارتفاع مخروط ناقص مترين ونصف قطر قاعدته السفلى ٧٫٣٠ متر ونصف قطر قاعدته العليا ٣٫٥٠ متر والمطلوب حساب السطح الجانبي للمخروط الكامل وحجمه

١٦ - المطلوب حساب السطح الحادث من دوران المستقيم اب = ٥ متر حول محور كائن معه في مستو واحد وكان بعد انهايتيه عن المحور مساويين ٣ متر و ٤ متر

١٧ - المطلوب حساب السطح الحادث من دوران محيط مثلث متساوى الاضلاع حول أحد أضلاعه اب = ٥ متر

١٨ - المطلوب حساب ارتفاع منطقة مساحتها تساوى دائرة عظيمة ونصف قطر الكرة التي هي جزء من سطحها مساو سبعة أمتار

١٩ - المطلوب حساب الحجم المتولد من دوران مثلث متساوى الاضلاع أحد أضلاعه اب = ٥ متر حول محور مار برأسه ومواز قاعدته

٢٠ - المطلوب حساب حجم القطاع الكروى اذا كانت مساحة المنطقة قاعدته تساوى مترا مربعا ونصف قطر الكرة مساويا مترا

٢١ - المطلوب حساب حجم المكعب المرسوم داخل الكرة التي نصف قطرها خمسة امتار وبالعكس

٢٢ - مايؤول اليه سطح الكرة وحجمها اذا ضوعف نصف قطرها

٢٣ - المطلوب حساب سطح الشقة التي يعادل مقدار زاويتها ٢٨° ونصف قطر الكرة يساوى أربعة أمتار

٢٤ - المطلوب حساب زاوية الشقة اذا عادلت مساحتها مترا مربعا وكان نصف قطر الكرة مساويا ٤٫٥ مترا مربعا

الباب الثانى

فى القطاعات المخروطية والمنحنى البريمى

* يطلق اسم القطاعات المخروطية على القطع الناقص والقطع المكافئ والقطع الزائد

الفصل الاول

فى القطع الناقص

تعريفات

(٣٦١) القطع الناقص هو محل النقط التى يكون مجموع بعدى كل واحدة منها عن نقطتين ثابتتين فيه ثابت دائما (شكل ٢٨٨) النقطتان الثابتتان تسميان بالبورتين ونرمز لهما هنا بالرمزين ب و بَ

بعد أى نقطة من نقط القطع الناقص عن أى واحدة من البورتين يسمى نصف قطر بوريا ويرمز هنا لنصفى القطرين البوريين لاى نقطة بالرمزين ص و صَ

والمقدار الثابت الدال على مجموع نصفى القطرين البوريين لاى نقطة يبين هنا بالمقدار ٢ ا وأما البعد بين البورتين فيبين بالمقدار ٢ حـ

(٣٦٢) مماس القطع الناقص فى أى نقطة هو نهاية الاوضاع التى يأخذها قاطع متحرك مار بهذه النقطة وبأخرى تقرب منها شيأ فشيأ الى غير نهاية

المبحث الاول

فى رسم القطع الناقص

عملية

(٣٦٣) المطلوب رسم القطع الناقص

الطريقة الاولى — وهى رسمه نقطة فنقطة (شكل ٢٨٨)

ليكن ں و ںَ البورتين و ٢ ا المجموع الثابت و ں ںَ = ٢ ح و و وسط ں ںَ فنأخذ البعدين و هـ و و ط متساويين وكل منهما يساوي ا فيكون النقطتان هـ و ط من نقط القطع الناقص لان

شكل ٣٨٨

هـ ں + هـ ںَ = ط ںَ + هـ ںَ = ٢ ا و

ط ں + ط ںَ = ط ں + هـ ں = ٢ ا

ثم نقيم من نقطة و عمودا غير محدود على المستقيم هـ ط ونجعل احدى البورتين مركزا ونرسم محيط دائرة بنصف قطر مساو ا فيقطع العمود في النقطتين ى و ى تكونان أيضا من نقط المنحنى لان

ى ں + ى ںَ = ٢ ى ںَ = ٢ ا و ى ں + ى ںَ = ٢ ى ںَ = ٢ ا

اذا جعل ب رمزا للبعد و ى حدث $ا^٢ = ب^٢ + ح^٢$

ثم اذا فرضت نقطة مثل ل على المستقيم هـ ط وجعلت نقطة ں مركزا ورسم محيط دائرة بنصف قطر مساو ط ل وجعلت بعد ذلك نقطة ںَ مركزا ورسم محيط دائرة آخر بنصف قطر مساو هـ ل فان هذين المحيطين يتقاطعان في نقطتين م و م١ تكونان من نقط المنحنى ومتماثلتي الوضع بالنسبة للمستقيم هـ ط

ثم اذا أبدل نصفا القطرين بعضهما مع عدم تغير المركزين فانا نتوصل أيضا الى نقطتين جديدتين مَ و مَ١ من نقط المنحنى متماثلتي الوضع أيضا بالنسبة للمستقيم هـ ط ومماثلتين للنقطتين م و م١ بالنسبة للمستقيم ى ى وباعادة مثل هذه العملية مرارا فانه يتوصل في كل مرة الى أربع نقط من نقط المنحنى متماثلة مثنى بالنسبة لكل واحد من المستقيمين هـ ط و ى ى فاذا وصلت جميع النقط المتصلة بخط فانه يتشكل منحنى القطع الناقص المطلوب

تنبيه ١ - حيث ان جميع نقط المنحنى متماثلة مثنى بالنسبة لكل واحد من المستقيمين هـ ط و ى ى فيسمى المستقيمان المذكوران من أجل ذلك بمحوري تماثل المنحنى

تنبيه ٢ - حيث ان الاضلاع المتقابلة من الشكل الرباعي ں م ںَ مَ١ متساوية فيكون متوازي الاضلاع وحيث ان قطريه ينصفان بعضهما في نقطة و فتكون هذه النقطة وسطا لجميع أوتار المنحنى المارة بها ولذا تسمى هذه النقطة بمركز المنحنى

تنبيه ٣ - حيث ان انتخاب نقطة ل على المحور هـ ط يستلزم تقاطع محيطي الدائرتين اللذين مركزاهما ں و ںَ فيجب أن يكون البعد بين المركزين ٢ ح أصغر من مجموع نصفي

القطرين ٢ ا وأكبر من فاضلهما . أما الشرط الاول فهو محقق لان ا > ح وحينئذ فلتحقق الشرط الثانى يجب أن يكون ول < ح أعنى انه يجب أخذ نقطة ل بين النقطتين ں و ں َ

ومن هنا يعلم ان مقدار نصف القطر البورى يتغير بين المقدارين ا — ح و ا + ح

نتيجة — يمكن أن يستنتج مما ذكر أن هـ ط هو المحور الاكبر للقطع الناقص وان ى ء هو محوره الاصغر وذلك لانه يؤخذ من المثلث م ں ں َ ان

ص^{2} + ص َ^{2} = ٢ $\overline{\text{م و}}^{2}$ + ٢ ح^{2} أو ٢ $\overline{\text{م و}}^{2}$ = ص^{2} + ص َ^{2} — ٢ ح^{2} أو

٢ $\overline{\text{م و}}^{2}$ = ص^{2} + ص َ^{2} + ٢ ص ص َ — ٢ ح^{2} — ٢ ص ص َ = ٤ ا^{2} — ٢ ح^{2} — ٢ ص ص َ

فاذا جعل ٢ ع رمز اللفرق بين نصفى القطرين البوريين أمكن أن يوضع

ص َ = ا + ع و ص = ا — ع أو ص ص َ = ا^{2} — ع^{2} واذن يكون $\overline{\text{م و}}^{2}$ = ں^{2} + ع^{2}

ثم يقال حيث ان النهاية العظمى للكمية ع هى ح فتكون النهاية العظمى للمقدار م و هى ا وكذا حيث ان النهاية الصغرى للكمية ع هى صفر فتكون النهاية الصغرى للمقدار م و هى ں ولهذا يسمى هـ ط بالمحور الاكبر و ى ء بالمحور الاصغر وتسمى النقط هـ و ط و ى و ء بالرؤس

الطريقة الثانية — وهى طريقة رسمه دفعة واحدة

اذا أخذ خيط طوله ٢ ا وثبت طرفاه فى البورتين ں و ں َ وشد بواسطة سن قلم راسم يتحرك فانه يتشكل من ذلك القطع الناقص المطلوب

وذلك لان مجموع نصفى القطرين البوريين لكل نقطة من نقطه مساو ٢ ا وهذه طريقة يكثر استعمالها على الارض دون الرسم على الورق لعدم امكان الوصول بواسطتها الى رسم النقط المجاورة للمستقيم المار بالبورتين مع الضبط الكافى حيث انه عندما تماس جزآ الخيط فان أحدهما لا يكون مستقيما وزيادة على ذلك فانه متى رسم نصف القطع الناقص يحتاج الامر الى رفع القلم الراسم ونقل الخيط الى الجهة الثانية للبورتين لرسم النصف الثانى منه

غير انه يسهل تصحيح الضرر الاخير بواسطة استعمال خيط دائر طوله مساو ٢ ا + ٢ ح بان يثبت ابرتان فى البورتين ويحاط بهما الخيط المذكور ويشد شدا مناسبا بواسطة سن القلم الراسم ويحرك حتى يتم رسم القطع الناقص

نتيجة — اذا اتحد البورتان ں و ں َ فان المحل الذى يرسمه القلم يكون محيط دائرة وحينئذ فالدائرة هى قطع ناقص بورتاه متحدتان

الطريقة الثالثة – وهى طريقة تقريبية (شكل ٢٨٩)

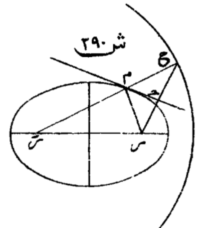
يمكن أن يتوصل بواسطة أقواس دوائر متقاطعة الى رسم شكل تقرب صورته من القطع الناقص فاذا كان و هـ = ا ، و ى = ب نصفى القطرين البورين للقطع الناقص المراد رسمه يمد و ىَ على استقامته ويؤخذ منه البعد و ك = و هـ ثم يؤخذ ى ل = ىَ ك = ا – ب ويقام العمود م ىَ على وسط المستقيم هـ ل ثم يعمل كذلك على المستقيم ى هـَ و يتمم بعد ذلك المعين ى ح ىَ حَ وتمد أضلاعه على استقامتها ثم تجعل كل واحدة من النقطتين ى و ىَ مركزا وبنصف قطر مساو ىَ ى يرسم قوسا الدائرتين م ى مَ و م١ ىَ م١َ وتجعل أيضا النقطتان ح و حَ مركزين وبنصف قطر مساو ح م يرسم القوسان م م١ و مَ م١َ فيمران تقريبا بالنقطتين هـ و هـَ ولا يكون الشكل الحادث هو القطع الناقص المطلوب وانما يفرق عنه بقليل

المبحث الثانى

فى بعض نظريات مهمة

نظرية

(٣٦٤) القطع الناقص هو محل النقط المتساوية البعد عن نقط محيط دائرة وعن نقطة ثابتة فيه (شكل ٢٩٠)



لتكن م احدى نقط القطع الناقص الذى بورتاه ر و رَ وليكن ٢ ا مجموع نصفى القطرين البورين لها بحيث يكون م ر + م رَ = ٢ ا فيمد رَ م على استقامته ونأخذ عليه البعد م ح = م ر فالمستقيم رَ ح يكون مساويا ٢ ا واذن فهو ثابت المقدار وتكون نقطة ح موجودة على محيط دائرة نصف قطرها مساو ٢ ا

ومركزه ىَ وأما نقطة م فهي على بعد واحد من هذا المحيط ومن نقطة ى وهو المراد

تنبيه - الدائرة ىَ ع تسمى بالدائرة الدليلة للبورة ى وأما الدائرة الدليلة للبورة ىَ فهى التى مركزها ى ونصف قطرها ٢ ا

نتيجة ١ - ينتج من هذه النظرية طريقة جديدة لرسم القطع الناقص نقطة فنقطة متى علم بورتاه ومجموع نصفى القطرين البورين ٢ ا لانه اذا رسم بنقطة ىَ مثلا الدائرة الدليلة لنقطة ى ووصل بين نقطة ع مثلا احدى نقط محيط الدائرة وبين نقطة ى بمستقيم ثم اقيم العمود حم على وسط هذا المستقيم فانه يقابل المستقيم ىَ ع بين ىَ و ع فى نقطة تكون احدى نقط القطع الناقص المطلوب

وسيشاهد فيما يأتى ان العمود حم يكون مماسا لمنحنى القطع الناقص فى نقطة م وحينئذ فيكون لهذه الطريقة فائدة أخرى مهمة وهى تعيين نقطة من نقط المماس

نتيجة ٢ - وينتج من طريقة رسم القطع الناقص هذه ان نقط المنحنى متماثلة الوضع بالنسبة لكل من المستقيمين ى ىَ والمستقيم العمودى على وسطه حيث يمكن تغيير دور البورتين

نظـــــرية

(٣٦٥) كل نقطة مفروضة فى مستوى القطع الناقص يكون مجموع بعديها عن بورتيه أكبر أو أصغر من المجموع الثابت ٢ ا على حسب ما تكون هذه النقطة خارجة عن منحنى القطع الناقص أو داخلة فيه (شكل ٢٩١)

أولا - لتكن ع نقطة خارجة عن المنحنى فنصل ع ى و ع ىَ و م ى فيحدث (٢٠ تنبيه)

ع ى + ع ىَ > م ى + م ىَ أو > ٢ ا

ثانيا - لتكن د نقطة داخل المنحنى فنصل د ى و د ىَ ثم نمد د ىَ على استقامته حتى يقابل القطع الناقص فى نقطة م ونصل م ى فيحدث (٢٠ تنبيه)

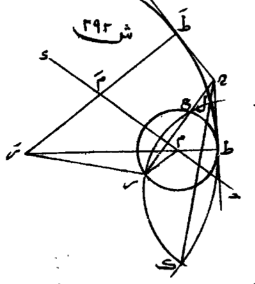
د ى + د ىَ < م ى + م ىَ أو < ٢ ا وهو المراد

شكل ٢٩١

عمليـــــة

(٣٦٦) المطلوب تعيين نقط تقاطع مستقيم بمنحنى القطع الناقص الغير المرسوم (شكل ٢٩٢)

لتكن ر و رَ بورتى القطع الناقص و ح ى المستقيم المعلوم و ٢ ا مجموع نصفى القطرين البورين



فاذا فرض ان المسئلة محلولة وان م هى احدى نقط تقاطع المنحنى بالمستقيم بحيث يكون م ر + م رَ = ٢ ا نمد رَ م على استقامته بمقدار م ط = م ر وحينئذ يكون معرفة وضع نقطة ط كافيا لحل المسئلة أى لتعيين م وللوصول الى ذلك يقال

من المعلوم أولا أن هذه النقطة توجد على الدائرة الدليلة للبورة ر وثانيا انه لو جعلت نقطة م مركزا ورسم محيط دائرة بنصف قطر مساو م ط فان هذا المحيط يمس الدائرة الدليلة فى نقطة ط ويمر بنقطة ر وحينئذ فقد آل تعيين نقطة ط الى حل المسئلة الآتية وهى

المطلوب تمرير محيط دائرة يمر بنقطة ر المعلومة ويكون مماسا لمحيط دائرة معلومة بحيث يكون مركزه موجودا على مستقيم معلوم لكن لو عينا نقطة ع المماثلة لنقطة ر بالنسبة للمستقيم المعلوم فان هذه النقطة يجب أن تكون موجودة على المحيط ط ر واذن فقد آل الامر الى حل المسئلة الآتية وهى (١٥٦)

المطلوب تمرير محيط دائرة بنقطتين معلومتين ويمس محيط دائرة معلومة

ولحل هذه المسئلة يركز فى نقطة ح الاختيارية ويرسم محيط دائرة يمر بالنقطتين ع و ر ويقطع محيط الدائرة المعلومة فى النقطتين ك و ل ثم اذا وصل ك ل وبحث عن نقطة تقابله ى بالمستقيم ر ع ثم مد منها مماسان للدائرة المعلومة فان نقطتى التماس ط و طَ يتعين بهما نقطتا تقاطع المستقيم ح ى بالمنحنى متى وصل بين كل واحدة منها والبورة رَ بمستقيم

تنبيه — حيث ان نقطة ر هى داخل الدائرة الدليلة فلا يمكن حينئذ أن تكون المسئلة ممكنة أى لا يمكن أن يكون المستقيم ح ى قاطعا للمنحنى الا اذا كانت نقطة ع داخل الدائرة الدليلة أو على محيطها

ففى الحالة الاولى يتأتى رسم المماسين ى ط و ى طَ وبذلك يوجد نقطتان للتقاطع م و مَ وفى الحالة الثانية تكون نقطة ع هى نفس نقطة التماس وبذلك ينطبق المماسان على بعضهما و يتحد نقطتا التماس معا فى نقطة ع المذكورة وبناء عليه يكون المستقيم ح ى قاطعا للمنحنى فى نقطتين متحدتين معا أى مماساله

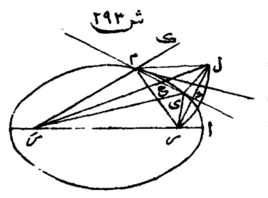
نتيجـــة ـ حيث انه لايمكن أن يمد من نقطة ﻫ الخارجة عن محيط الدائرة الا مماسان له ﻫ ط و ﻫ طَ فلايمكن اذن للمستقيم أن يقابل محيط القطع الناقص الافى نقطتين وبذلك يكون القطع الناقص محدبا

المبحث الثالث

فى تماس القطـــع الناقص

نظـــــــرية

(٣٦٧) مماس القطع الناقص فى نقطة ما ينصف الزاوية الواقعة بين أحد نصفى القطرين البوريين لنقطة التماس وامتداد نصف قطرها البورى الثانى (شكل ٢٩٣)



ليكن م ى قاطعا للمنحنى مارا بنقطة م وباخرى قريبة جدا منها فاذا عينا نقطة ل المماثلة الى ر بالنسبة للقاطع م ى ووصلنا بينها وبين نقطة رَ بالمستقيم ل رَ وكانت ع نقطة تقابل هذا المستقيم بالقاطع م ى حدث رَ ع ل = رَ ع ر

وحيث ان النقطتين م و ى ممتازتان عن بعضهما فتكون نقطة ع ممتازة بالاقل عن احداهما ى مثلا فيحدث

رَ ع ل < رَ ى ل أو رَ ع ر < رَ ى ل أو < ٢ ا

واذن فتكون نقطة ع ممتازة أيضا عن نقطة م وموضوعة داخل القطع الناقص ضرورة بين م و ى

اذا تقرر هذا يقال حيث ان القاطع منصف للزاوية المتكونة من ع ر وامتداد رَ ع فاذا قربت اذن نقطة ى من نقطة م فان القاطع يقرب نحو المستقيم م ط المنصف للزاوية المتكونة من المستقيم م ر ومن امتداد رَ م وحينئذ فيكون المماس فى نقطة م الذى هو على مقتضى التعريف نهاية لاوضاع القاطع المتحرك متساوى الميل على نصفى القطرين البوريين لهذه النقطة وهو المراد

نتيجة ـ و ينتج من ذلك أنه اذا اريد مد مماس لمحنى القطع الناقص من نقطة مفروضة عليه فانه يكفى مد المستقيم المنصف للزاوية الواقعة بين أحد نصفى القطرين البوريين لهذه النقطة وامتداد نصف قطرها الثانى

نظـــــــرية

(٣٦٨) محل مساقط بورتى القطع الناقص على مماساته هو محيط دائرة مركزه مركز القطع الناقص ونصف قطره نصف محوره الاكبر

(شكل ٢٩٤)

شكل ٢٩٤

لتكن م نقطة تماس المستقيم ى ىَ بالقطع الناقص فاذا أنزلنا من نقطة ر العمود ر ى على المماس ى ىَ ومددناه حتى يتلاقى مع المستقيم رَ ط فان الزاوية ط م ى تكون مساوية للزاوية ى م ر كما تقدم فى النظرية السابقة ويكون المثلثان ط م ى و ى م ر متساويين لمساواة ضلع ومجاورتيه من الزوايا من أحدهما لنظائرها من الثانى واذن يكون م ط = م ر و ر ى = ط ى وبناء عليه يكون رَ ط = رَ م + م ر = ٢ ا

اذا تقرر هذا يقال حيث كانت نقطة ى وسط المستقيم ط ر ونقطة و وسط المستقيم ر رَ فيكون المستقيم ى و نصف المستقيم ط رَ أو نصف ل ى أعنى يكون مساويا للمقدار الثابت وحينئذ فيكون محل نقطة ى هو محيط دائرة مركزه و ونصف قطره نصف ل ى وهو المراد

عمليـــــة

(٣٦٩) المطلوب مد مماس لقطع ناقص معلوم موازٍ لاتجاه معلوم مع تعيين نقطة تماسه به

(شكل ٢٩٤)

ليكن الاتجاه المعلوم ع ونفرض ان المسئلة محلولة وان ى ىَ هو المماس المطلوب الموازى للاتجاه ع وان م هى نقطة التماس فنصل رَ م ونمده حتى يلاقى الدائرة الدليلة للبورة ر فى نقطة ط وحينئذ اذا تعين وضع نقطة ط فانا نتوصل الى حل المسئلة فاذا وصلنا ر ط

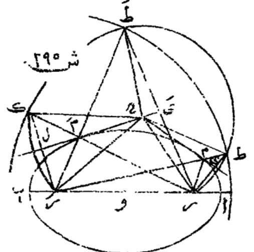
فان المثلثين ط م ى و ى م ر يجب أن يكونا متساويين لتساوى زاوية والضلعين المحيطين بها من أحدهما النظائرها من الثانى واذن يكون ر ط عمودا على ى ىَ أو على ع وبناء عليه فتتعين نقطة ط بتقاطع مستقيم معين بمحيط دائرة ومتى علمت فانها تتعين نقطة م أيضا فى تقاطع رَ ط مع العمود المقام على ر ط وحيث انها توجد نقطة أخرى طَ مناظرة لنقطة ط فيوجد اذن للمسئلة حلان

تنبيه — ويمكن الوصول الى حل هذه المسئلة بالبحث عن وضع نقطة ى الكائن فى تقاطع الدائرة التى قطرها ل ن مع العمود النازل من نقطة ر على الاتجاه المعلوم ع لانه متى تعين وضعها يتعين أيضا وضع المماس ى ىَ وأما نقطة التماس فانها تتعين بواسطة مد ر ى حتى يقابل الدائرة الدليلة فى نقطة ط ثم وصل ط رَ وبواسطة تعيين نقطة ي التى هى النقطة الثانية لتقابل العمود ر ط بمحيط الدائرة الذى قطره ل ن يمكن الوصول الى حل ثان للمسئلة ويمكن الوصول الى هـذا الحل الثانى اذا اجريت على البورة رَ اعمال مثل التى اجريت على البورة ر

نتيجة — ومما يسهل مشاهدته هو ان نقطتى التماس موجودتان على نهايتى قطر القطع الناقص م مَ وذلك لان الشكل ر م رَ مَ متوازى الاضلاع لتساوى أضلاعه المتقابلة

عمليـــــة

(٣٧٠) المطلوب تمرير مماس للقطع الناقص من نقطة ن الخارجة عنه (شكل ٢٩٥)



نفرض ان المسئلة محلولة وان ن م هو المماس المطلوب تعيينه وان م هى نقطة تماسه المطلوب البحث عنها أيضا فاذا وصل رَ م ومد على استقامته وأخذ م ط = ر م يظهر ان معرفة نقطة ط كاف لتعيين نقطة م فنعتبرها اذن كأنها النقطة المطلوبة

وحيث ان رَ ط = ٢ أ فتوجد نقطة ط على الدائرة الدليلة للبورة ر ومن جهة أخرى حيث ان ن م منصف للزاوية ر م ط فيكون عمودا على وسط المستقيم ر ط قاعدة المثلث المتساوى الساقين ر م ط ويكون ن ط = ن ر وبذلك توجد نقطة ط على

محيط الدائرة الذى مركزه ن ونصف قطره ن ر واذن فتوجد فى تقاطع محيطى دائرتين معلومتين ولما كان هذان المحيطان يتقاطعان دائما فى نقطتين ط , طَ فتقبل المسئلة اذن حلين ن م , ن مَ

تنبيه ـ من المفيد مناقشة شروط امكان حل هذه المسئلة فنقول

من المعلوم ان امكان حل المسئلة يتوقف على تقاطع المحيطين بمعنى أن يكون البعد بين مركزيهما رَ ن أصغر من مجموع نصفى القطرين ٢ ا , ن ر وأكبر من فاضلهما

أولا ـ اذا لم تكن نقطة ن على المستقيم ر رَ فانه يتأتى وجود المثلث ن ر رَ ويحدث

ن رَ > ٢ جـ + ن ر > ٢ ا + ن ر

ثانيا ـ اذا وجدت ن خارج القطع الناقص على امتداد ر رَ تحصل

ن رَ = ن ر ± ٢ جـ > ن ر + ٢ ا

وبناء عليه يكون الشرط الاول محققا دائما كلما كانت نقطة ن خارجة عن ر رَ

ثالثا ـ اذا كانت ن خارجة عن القطع الناقص وكان ٢ ا > ن ر فمن المعلوم ان

ن ر + ن رَ > ٢ ا أو ن رَ > ٢ ا − ن ر

رابعا ـ اذا كان ن ر > ٢ ا فان النقطة تكون خارج القطع الناقص ضرورة لانه يحصل بداهة ن ر + ن رَ > ٢ ا فاذا لم تكن على امتداد ر رَ تحصل من المثلث ن ر رَ ان

ن رَ > ن ر − ٢ جـ > ن ر − ٢ ا

خامسا ـ اذا وجدت ن على امتداد ر رَ مع فرض ان ن ر > ٢ ا تحصل

ن رَ = ن ر ± ٢ جـ أو ن رَ > ن ر − ٢ ا

وبالجملة فكلما كانت ن خارجة عن القطع الناقص فان المحيطين يتقاطعان ويكون للمسئلة حلان

سادسا ـ اذا كانت ن على القطع الناقص تحصل ن رَ = ٢ ا − ن ر وهذا يدل على ان محيطى الدائرتين يتماسان وبذلك لا يكون للمسئلة الا حل واحد

سابعا ـ اذا كانت ن داخل القطع الناقص تحصل ن رَ < ٢ ا − ن ر وهذا يدل على تباعد المحيطين فى الداخل وبذا لا يكون للمسئلة حلول مطلقا

نظـــــرية

* (٣٧١) المستقيم الواصل بين نقطة تقاطع مماسين للقطع الناقص وبين احدى بورتيه
* ينصف الزاوية الواقعة بين نصفي القطرين البوريين الواصلين بين نقطتي التماس والبورة
* المذكورة (شكل ٢٩٥)
* ليكن د م و د مَ مماسي القطع الناقص الخارجين من نقطة د والمطلوب البرهنة
* على أن المستقيم د ب‍َ منصف للزاوية م ب‍ مَ يقال من المعلوم أن النقطتين ط و طَ
* المتحصلتين من الاعمال التي أجريت في المسئلة المتقدمة هما متماثلتان بالنسبة للمستقيم
* د بَ الواصل بين المركزين فاذا دار المثلث د بَ ط حول د بَ فان نقطة ط تنطبق
* على طَ وتقع الزاوية ط بَ هـ على الزاوية د بَ طَ وتكونان متساويتين وهو المطلوب

نظـــــرية

* (٣٧٢) الزاويتان الواقعتان بين مماسي القطع الناقص المخرجين من نقطة واحدة وبين
* المستقيمين الواصلين من هذه النقطة الى البورتين متساويتان (شكل ٢٩٥) أعني أن
* زاوية م د ب = مَ د بَ
* وللبرهنة على ذلك يقال ان المثلثين د ط بَ و د ب ك متساويان لتساوي أضلاعهما
* الثلاثة المتناظرة فيهما لان د ط = د ب و ط بَ = ب ك = ٢ أ و د بً = د ك
* ومن تساويهما ينتج أن زاوية ط د بَ = زاوية ب د ك فاذا طرحنا منهما الزاوية
* المشتركة ب د بَ تكون الزاويتان ط د ب و بَ د ك متساويتين واذن يكون
* نصفاهما م د ب و مَ د بَ كذلك وهو المراد

نظـــــرية

* (٣٧٣) محل رؤس الزوايا القائمة المرسومة على قطع ناقص هو محيط دائرة متحد معه في المركز
* ونصف قطره البعد الكائن بين نهايتي نصفي المحورين (شكل ٢٩٥)
* لتكن الزاوية م د مَ قائمة فعلى مقتضى النظرية السابقة تكون زاوية ط د بَ
* كذلك ويحدث

* $\overline{بَ ط}^{٢} = \overline{د بَ}^{٢} + \overline{د ط}^{٢}$ أو $٤ أ^{٢} = \overline{د بَ}^{٢} + \overline{د ب}^{٢}$

* لكن المثلث ة م مَ يؤخذ منه أن

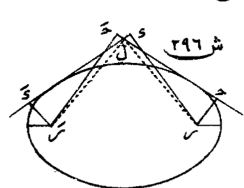
* ة م² + ة مَ² = ٢ حـ² − ٢ ة و²   أو

* ة و² = ٢ أ² − حـ² = ٢ أ² − (أ² − ب²) = أ² + ب²

---

* نظـــــرية

* (٣٧٤) حاصل ضرب بعدى كل واحد من بورتى القطع الناقص عن مماسة ثابت دائما
* ومساو لمربع نصف المحور الاصغر (شكل ٢٩٦)



* اذا مررنا من نقطة ل المماسين ل حـ و ل ىَ
* للقطع الناقص وأنزلنا من البورتين م و مَ الاعمدة
* م حـ و م ى و مَ حَ و مَ ىَ على هذين المماسين
* ووصلنا م ل و مَ ل فالمثلثان م ل حـ و مَ ل ىَ
* الحادثان يكونان متشابهين (٣٧٢) ويحدث
* م حـ / مَ ىَ = م ل / مَ ل وكذا المثلثان القائما الزاوية م ل ى و مَ ل حَ فهما متشابهان لان
* زاوية م ل ى أو م ل حـ + حـ ل ى مساوية لزاويته مَ ل ىَ + ىَ ل حَ ويحدث
* م ى / مَ حَ = م ل / مَ ل ومن هذا التناسب والسابق يتوصل الى م حـ / مَ ىَ = م ى / مَ حَ أو
* م حـ × مَ حَ = م ى × مَ ىَ

* أعنى أن حاصل ضرب العمودين ثابت وللوصول الى مقداره يقال اذا اعتبرنا الحالة
* الخصوصية التى يكون فيها المماس موازيا للمحور الاكبر فان كل واحد من العمودين يكون
* مساويا نصف المحور الاصغر ب ويحدث م حـ × مَ حَ = ب² وهو المطلوب

المبحث الرابـــع

فى مساحـــة القطـــع الناقص

نظـــــرية

(٣٧٥) مسقط الدائرة على مستو هو قطع ناقص (شكل ٢٩٧)

والبرهنة على ذلك يقال حيث ان مسقطى أى شكل على مستويين متوازيين متساويان فنعتبر اذن مستوى المسقط مارا بمركز الدائرة وموازيا لمستوى المسقط المعلوم

ش ٢٩٧

ليكن ا ج اَ قطر الدائرة وخط تقاطعها بمستوى المسقط و ب ج بَ القطر العمودى عليه و ب٢ ج ب٢َ مسقطه فيكون عمودا على ا اَ ثم يوضع لاجل الاختصار ج ا = ج ب = ا و ج ب٢ = ب و ب ب٢ = ح ثم يؤخذ ج ر = ج رَ = ب ب٢ = ح فاذا اعتبرنا نقطة ما م من الدائرة وكان م١ مسقطها ووصلنا م١ ر و م١ رَ فانا نبرهن على أن م١ ر + م١ رَ = ٢ ا

وللوصول الى ذلك نمد القطر م ج مَ المساوى ٢ ا ثم المستقيمات م ر و م رَ و مَ ر و مَ رَ وننزل من البورة ر العمود ر ع على م مَ وننزل أيضا من نقطة م١ العمود م١ ل على ج ا ونصل م ل فالمثلثان ج م ل و ج ر ع يكونان متشابهين (٢١٣) ويحدث ر ع / م ل = ح / ا = م م١ / م ل واذن يكون ر ع = م م١ ويكون المثلثان القائما الزاوية م ر م١ و م ر ع متساويين لمساواة وتر وضلع من أحدهما لنظيريهما من الثانى وينتج من تساويهما أن م١ ر = م ع

وأما المثلثان القائما الزاوية م رَ م١ و مَ رَ ع فهما متساويان أيضا لان فيهما الوترين رَ م و رَ مَ متساويان وفيهما الضلعان م م١ و رَ ع كذلك وينتج من تساويهما أن م١ رَ = مَ ع ويكون اذن م١ ر + م١ رَ = م ع + مَ ع = ٢ ا وهو المطلوب

نتيجة ١ ـ البعد م ل يسمى بالاحداثى الرأسى لنقطة م وأما البعد ل ج فيسمى بالاحداثى الافقى لها وكذا يسمى البعد م١ ل بالاحداثى الرأسى لنقطة م١ والبعد ج ل يسمى باحداثيها الافقى وحيث ان التناسب م١ ل / م ل = ب / ا الناتج من المثلثين المتشابهين م م١ ل و ب ب٢ ج ثابت لاى نقطة مثل م١ من القطع الناقص أمكن أن يقال ان القطع الناقص يمكن استخراجه من الدائرة بواسطة تغيير احداثياتها الرأسية على نسبة واحدة

نتيجة ٢ ـ يمكن أن يستنتج من هذه النظرية طريقة جديدة لرسم القطع الناقص لانا اذا تصورنا دوران مستوى القطع الناقص حول المحور ا اَ الى أن ينطبق على مستوى الدائرة فان المستقيم م١ ل ينطبق ضرورة على م ل و ب٢ ج على ب ج وهكذا وحيث ان الابعاد

م١ل و ب٢ ج١ و الخ لا تتغير فى أثناء الدوران و بعده فتكون النسبة السابقة $\frac{م١ل}{م ل} = \frac{ب}{ا}$
ثابتة وبناء عليه يمكن أن يقال

اذا فرض قطع ناقص ودائرة متحدة معه فى المركز وقطرها مساو لمحوره الاكبر وأخذت نقطة على محيط كل منهما بحيث تكونان متحدتى المسقط على المحور الاكبر فتكون النسبة بين الاحداثى الرأسى لنقطة القطع الناقص و بين الاحداثى الرأسى لنقطة محيط الدائرة كالنسبة بين نصفى المحورين ب و ا

اذا تقرر هذا و أريد رسم القطع الناقص الذى محوراه ا١ ب١ = ٢ا و ج١ ء١ = ٢ب (شكل ٢٩٨) فانا نرسم دائرتين متحدتى المركز بنصفى القطرين ا و ب ثم نأخذ نقطة ما م١ مثلا على محيط الدائرة وننزل منها العمود م١ل على المحور و ا١ ونصل م١و ثم نمد من نقطة م٢ وهى تقاطع هذا المستقيم الواصل بمحيط الدائرة و ج١ المستقيم م٢م موازيا للمستقيم و ا١ فنقطة تقابله م بالعمود م١ل تكون احدى نقط القطع الناقص لانه يحدث $\frac{م ل}{م١ل} = \frac{م٢و}{م١و} = \frac{ب}{ا}$

نتيجة ٣ – يمكن استنتاج كثير من خواص القطع الناقص مباشرة من اعتباره كأنه مسقط لمحيط دائرة فمماس القطع الناقص م ط هو مسقط مماس الدائرة م١ ط وحينئذ فلايجاد مماس القطع الناقص يجب وصل نقطة ط بنقطة م

وكذلك لو مد فى الدائرة جملة أوتار متوازية فيكون محل أواسط هذه الاوتار قطر اللدائرة وعمودا على اتجاهها وحيث ان هذه الاوتار تنسقط فى مستقيمات متوازية وأن انصافها تنسقط فى أنصاف مساقطها فيكون محل أواسط جملة أوتار متوازية فى القطع الناقص هو مستقيم يمر بمركزه

نظـــــرية

(٣٧٦) مساحة القطع الناقص تساوى حاصل ضرب نصفى محوريه فى النسبة التقريبية بين محيط الدائرة وقطره

وللبرهنة على ذلك نبدأ أولا بتقويم المساحة السطحية لجزء من القطع الناقص مثل ل ء ة ع محصور بين الرأسين ء ل و ة ع وبين المحور (شكل ٢٩٩)

فنقول اذا قسمت المسافة ع ل الى جملة أجزاء متساوية وأقيم من نقط التقاسيم أعمدة على المحور الاكبر ومدت الى أن تلاقى محيط الدائرة الذى مركزه و ونصف قطره ا فى النقط ءَ و مَ و عَ و ... ڡَ ثم رسم من النقط م و ع و ڡ و مَ و عَ و ڡَ مستقيمات موازية للمحور الاكبر فانه يتكون من ذلك جملتان من المستطيلات متحدة جميعها فى القاعدة أما ارتفاعات الجملة الاولى فهى الاحداثيات الرأسية للقطع الناقص وأما ارتفاعات الجملة الثانية فهى الاحداثيات الرأسية للدائرة وبناء على ماتقدم يحدث

شكل ٢٩٩

$$\frac{ل_{ا} ء م ک}{ل_{ا} ءَ مَ ک} = \frac{ک_{ا} م ع ف}{ک_{ا} مَ عَ ف} = \ldots = \frac{ب}{ا}$$

ثم اذا رمزنا بالحرف $س_{ا}$ لمجموع المستطيلات المرسومة داخل جزء القطع الناقص و $سَ_{ا}$ لمجموع المستطيلات المرسومة داخل جزء الدائرة تحصل $\frac{س_{ا}}{سَ_{ا}} = \frac{ب}{ا}$ ولما كان هذا التناسب حقيقيا مهما كان عدد الاقسام المنقسم اليها البعد ع ل فاذا فرضنا ازدياد عدد هذه الاقسام الى غير نهاية فمن المعلوم أن المجموع $س_{ا}$ يقرب قربا كليا من مساحة جزء القطع الناقص س المطلوب تعيينها وأن المجموع $سَ_{ا}$ يقرب أيضا قربا كليا من مساحة جزء الدائرة المناظرة لها سَ وحينئذ فيكون عند النهاية $\frac{س}{سَ} = \frac{ب}{ا}$

أعنى أن نسبة مساحة أى جزء من القطع الناقص محصور بين احداثيين رأسيين عمودين على محوره الى مساحة الجزء المناظر له من الدائرة المرسومة على هذا المحور كقطر لها كالنسبة بين نصفى المحورين وبناء عليه اذا علمت مساحة جزء الدائرة وعلم المحوران تيسر مع السهولة تقويم مساحة الجزء المذكور من القطع الناقص

اذا تقرر هذا يقال اذا فرض تباعد النقطتين ڡ و ء عن بعضهما الى أن تنطبقا على النقطتين ص و صَ فان جزء القطع الناقص يؤل الى نصفه وجزء الدائرة يؤل أيضا الى نصفه وبناء عليه يكون

$$\frac{\frac{1}{2} س}{\frac{1}{2} سَ} = \frac{\frac{1}{2} س}{\frac{1}{2} ط ا^{2}} = \frac{ب}{ا} \quad \text{او} \quad س = ط ا ب$$ وهو المراد

الفصـــــل الثــانى

فى القطـــــع المكافئ

تعــاريف

(٣٧٧) القطع المكافئ هو محل النقط المتساوية البعد عن نقطة ثابتة وعن مستقيم ثابت أيضا (شكل ٣٠٠)

النقطة الثابتة تسمى بورة القطع المكافئ والمستقيم الثابت يسمى دليله ويرمز هنا للبورة بالرمز ر بعد أى نقطة من نقط القطع المكافئ عن البورة يسمى نصف قطر بورى ويرمز له هنا بالحرف ص

(٣٧٨) تعريف مماس القطع المكافئ هو عين تعريف مماس القطع الناقص (نمرة ٣٦١)

(٣٧٩) العمود الغير المحدود النازل من بورة القطع المكافئ على دليله يسمى محوره

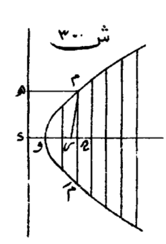
المبحث الاول

فى رسم القطـــــع المكافئ

عمليــــــه

(٣٨٠) المطلوب رسم القطع المكافئ

الطريقة الاولى ـ وهى طريقة رسمه نقطة فنقطة (شكل ٣٠٠)



اذا علمت بورة المنحنى ودليله فانه ينزل من البورة ر العمود ر ى على الدليل المعلوم فتكون و وسط البعد ر ى احدى نقط المنحنى على مقتضى التعريف (٣٧٧) ثم اذا أخذت نقطة ما ع على المحور ر ى وأقيم منها عمود غير محدود وجعلت نقطة ر مركزا ورسم محيط دائرة بنصف قطر مساو ع ى فانه يقطع العمود المذكور فى نقطتين م و مَ تكونان من نقط المنحنى لان م هـ = ع ى = ر م

لكنه لاجل أن يقطع محيط الدائرة المذكورة العمود ﻫ م يجب أن يكون ب ء < ء ﻫ وإذن فيجب أن تكون نقطة ﻫ على يمين نقطة و

نتيجة - يظهر من طريقة رسم المنحنى هذه أنه يمتد الى غير نهاية فى الاتجاه ء ب وأنه موجود بتمامه فى جهة واحدة من الدليل

الطريقة الثانية - وهى طريقة أخرى لرسم المنحنى نقطة فنقطة (شكل ٣٠١)

يمد مستقيم كيفما كان ح ك موازيا ء ب ونوصل نقطة ب بنقطة ﻫ تقاطع المستقيم ح ك بالدليل ثم يقام من نقطة ح وسط المستقيم ب ﻫ عمود عليه فيقابل ح ك فى نقطة م تكون احدى نقط المنحنى وسيذكر فيما يأتى أن ح م يكون مماسا للمنحنى وحينئذ يكون لهذه الطريقة فائدة أخرى

يؤخذ من طريقة رسم المنحنى هذه أولا أنه يأخذ فى التباعد عن المحور ب ء الى غير نهاية حيث ان ء ﻫ غير محدود وثانيا أن م ﻫ يكون أكبر من $\frac{1}{2}$ ب ﻫ وإذن فيزداد الى غير نهاية وبذلك يمتد المنحنى الى غير نهاية فى الاتجاه ء ب

الطريقة الثالثة - وهى طريقة رسمه دفعة واحدة (شكل ٣٠٢)

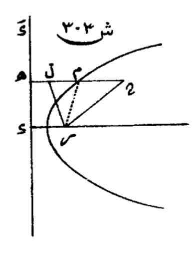
نضع حافة مسطرة بطول الدليل ونطبق أحد ضلعى القائمة من مثلث خشبى ع ﻫ ك قائم الزاوية على حافة المسطرة كما يظهر ذلك من الشكل ثم يثبت أحد طرفى خيط طوله مساو ع ﻫ فى رأس المثلث ع ويثبت طرفه الآخر فى البورة ب ثم يزلق المثلث حتى يصير الخيط مشدودا فى الاتجاه ب ع فتكون نقطة ع من نقط القطع المكافئ ثم يحرك المثلث بعد ذلك ويشد الخيط بواسطة سن قلم راسم متكئا على ﻫ ع فيرسم قوسا من القطع المكافئ لانه اذا كان ع ﻫ ك أحد أوضاع المثلث ونقطة م محل سن القلم فيكون ع م ب مساويا لطول الخيط ويكون م ﻫ = م ب واستعمال هذه الطريقة قليل جدا حيث لا يتوصل بها الا الى منحن صغير قريب من البورة

المبحث الثانى

فى بعض نظـــريات مهـــمة

نظـــــــرية

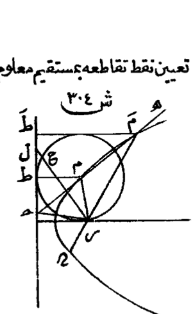
* (٣٨١) كل نقطة مفروضة داخل القطع المكافئ تكون أقرب للبورة من الدليل وكل نقطة
* خارجة عنه تكون بعكس ذلك (شكل ٣٠٣)



* الاول — لتكن ى نقطة داخل القطع المكافئ
* و ى ر و ى هـ بعديها عن البورة وعن الدليل و م
* نقطة تقابل ى هـ بالمنحنى فيحدث
* ى ر < ى م + م ر أو
* < ى م + م هـ أو < ى هـ
* الثانى — لتكن ل خارجة عنه و ل ر و ل هـ
* بعديها عن البورة والدليل و م نقطة تقابل امتداد
* ل هـ بالمنحنى فيحصل ل ر > م ر — م ل أو > م هـ — م ل أو > ل هـ
* وهو المراد

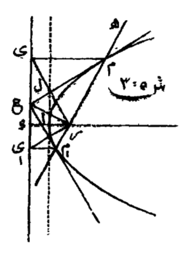
عمليـــــة

* (٣٨٢) اذا علم من القطع المكافئ بورته ودليله والمطلوب تعيين نقط تقاطعه بمستقيم معلوم
* بدون رسم المنحنى (شكل ٣٠٤)



* يقال نفرض أن المسئلة محلولة وأن م هى احـدى
* نقط تقاطع المستقيم ح هـ بالمنحنى وأن م ر نصف
* القطر البورى لنقطة م و م ط العمود النازل منها
* على الدليل فاذا جعلت م مركزا ورسم محيط دائرة
* بنصف قطر مساو م ر فانه يمس الدليل فى نقطة ط
* واذن فتعيين نقطة م يتوقف على حل المسئلة الآتية
* وهى

* المطلوب امرار محيط دائرة بنقطة معلومة ويكون مماسا لمستقيم معلوم ويكون مركزه موجودا
* على مستقيم آخر معلوم
* لكن اذا بحثنا عن نقطة ح المماثلة للبورة ر بالنسبة للمستقيم المعلوم فتكون موجودة
* ضرورة على المحيط المذكور وبناء عليه فيرجع الامر الى حل المسئلة الآتية وهى
* المطلوب امرار محيط دائرة بنقطتين معلومتين ويكون مماسا لمستقيم معلوم فاذا مد رح على
* استقامته الى أن يلاقى الدليل فى نقطة ل وبحثنا عن الوسط المتناسب ل ط بين ل ح و ل ر
* ووضعناه بجانبى نقطة ل فانا نتوصل الى النقطتين ط و طَ ثم اذا مدمنهما مستقيمان
* موازيان للمحور تحصل نقطتا التقاطع م و مَ المطلوبتان
* نتيجة — حيث انه لا يمكن وجود غير النقطتين ط و طَ فيستنتج من ذلك أن المستقيم
* لا يقابل المنحنى فى أكثر من نقطتين وبذلك يكون محدبا
* تنبيه ١ — اذا وقعت نقطة ح على الدليل فان النقطتين ط و طَ أو م و مَ
* تتحدان معا وبناء عليه يكون المستقيم هـ ح مماسا للقطع المكافئ وأما اذا وقعت نقطة
* ح على شمال الدليل فيدل ذلك على ان المستقيم هـ ح لا يقابل المنحنى
* تنبيه ٢ — اذا وازى المستقيم ر ح الدليل فانه لا يوجد الا محيط واحد مار بالنقطتين
* ومماس للدليل واذن فلا يوجد الا نقطة تقاطع واحدة م ثم اذا دار المستقيم ح هـ حول
* نقطة م وأخذ فى التقرب شيأ فشيأ من أن يكون موازيا للمحور فان نقطة ل أو بالتبعية لها
* نقطة ط تنتقل على الدليل وتأخذ فى التباعد الى غير نهاية وبناء عليه فتبعد نقطة م الى
* غير نهاية عن المنحنى
* تنبيه ٣ — اذا مر المستقيم ح هـ بالبورة فانه لا يتوصل بالاعمال المتقدمة الى ايجاد
* نقطتى التقاطع غير أنا للوصول اليهما فى هذه الحالة
* نقول (شكل ٣٠٥)



* اذا كانت م احدى نقطتى التقاطع وأنزلنا منها
* العمود م ى على الدليل وجعلت مركزا ورسم محيط
* دائرة بنصف قطر مساو م ر فانه يكون مماسا للدليل
* فى نقطة ى ثم اذا اقيم من نقطة ر العمود ر ح
* على المستقيم ر م فيكون مماسا أيضا لمحيط الدائرة
* المذكورة واذن يكون ح ر = ح ى وبناء عليه فانه

* يسهل تعيين نقطة ى ومنها تتعين نقطة م وبأخذ البعد ح ى = ح ى فانها تتعين
* أيضا نقطة م وهي النقطة الثانية لتقاطع المستقيم ح هـ بالقطع المكافئ

---

* نظـــــرية

* (٣٨٣) نصف القطر البورى لنقطة تماس مستقيم بقطع مكافئ عمود على المستقيم الواصل
* بين البورة ونقطة تلاقى المستقيم المماس بالدليل (شكل ٣٠٤)
* ليكن م مَ قاطعا للمنحنى و ح نقطة تقابله بالدليل فاذا أنزل من النقطتين م و مَ عمودان
* على الدليل م ط و مَ طَ حدث

$$\frac{\text{م ح}}{\text{مَ ح}} = \frac{\text{م ط}}{\text{مَ طَ}} = \frac{\text{م ر}}{\text{مَ ر}}$$

* ومن هنا يعلم أن المستقيم ر ح منصف للزاوية م ر ن
* وحينئذ اذا أخذت نقطة مَ في التقرب شيأفشيأ من نقطة م الى غير نهاية فان القاطع
* يقرب من أن يكون مماسا للمنحنى في نقطة م على مقتضى التعريف وتقرب زاوية م ر ن
* من القائمتين أو تقرب زاوية م ر ح من القائمة وهو المطلوب

---

* نظـــــرية

* (٣٨٤) القطع المكافئ هو النهاية التي يقرب منها قطع ناقص يزداد محوره الاكبر شيأفشيأ
* الى غير نهاية بينما تكون احدى بورتيه والرأس المجاورة لها ثابتتين (شكل ٣٠٦)
* وللبرهنة على ذلك يقال ليكن ى ن ى َ نَ
* قطعا ناقصا و ر و رَ بورتيه و ى ىَ
* محوره الاكبر فاذا رسمت الدائرة الدليلة للبورة
* ر تكون جميع نقط المنحنى على ابعاد متساوية
* من محيط هذه الدائرة ومن البورة
* ثم اذا فرض بقاء البورة ر والرأس ى ثابتتين
* وفرض تزايد نصف المحور ا الى غير نهاية فان
* محيط الدائرة الذى قطره ٢ ا يأخذ في الكبر
* شيأفشيأ الى غير نهاية ويقرب من أن يتحد مع المماس له في نقطة ء وبناء عليه فيأخذ القطع

* الناقص من التقرب الى غير نهاية نحو المحل الذى نقطه متساوية البعد عن البورة ب ومن
* المستقيم هـ هـَ أعنى نحو القطع المكافئ الذى بورته ب ودليله هـ هـَ وهو المطلوب
* تنبيه — يجب لادراك هذه النظرية جيدا أن يتصور نقطة على القطع الناقص متغيرة
* وموضوعة على بعد معين من البورة ب فن المعلوم أن وضع هذه النقطة يتغير كلما حصل
* تكييف فى شكل القطع الناقص المتحرك وتقرب الى غير نهاية من احدى نقط القطع المكافئ
* الثابت الذى بورته ب ودليله هـ هـَ
* نتيجة — ينتج مما ذكر أن جميع خواص القطع المكافئ يمكن استنتاجها من الخواص
* المناظرة لها من القطع الناقص بناء على الاعتبار المتقدم

---

* المبحث الثالث

* فى تماس القطع المكافئ

* نظرية

* (٣٨٥) مماس القطع المكافئ ينصف الزاوية الواقعة بين نصف القطر البورى لنقطة
* التماس والمستقيم المار بنقطة التماس موازيا للمحور (شكل ٣٠٥)
* أعنى ان المماس م ح ينصف الزاوية ب م ى
* وللبرهنة على ذلك يقال حيث ان زاوية ح ب م قائمة (٣٨٣) يكون المثلثان القائما
* الزاوية ح ب م و ح ى م متساويين لان فيهما الوتر ح م مشترك بينهما والضلع
* ح ب = ح ى وتكون زاوية ب م ح = ح م ى وهو المراد
* نتيجة ١ — اذا أريد مد مماس للقطع المكافئ من نقطة عليه يكفى أن يرسم نصف القطر
* البورى لها ويمد منها مستقيم يوازى المحور ثم تنصف الزاوية الحادثة بينهما
* نتيجة ٢ — اذا وصل المستقيم ب ى فن حيث ان كل واحدة من النقطتين م و ح
* على بعدين متساويين من نهايتى هذا المستقيم تكونان موجودتين على العمود القائم على وسطه
* واذن فتكون نقطة ل مسقط البورة ب على المماس م ح وهى وسط ى ب وحيث
* ان نقطة ا وسط البعد ب د أمكن أن يقال ان محل مساقط البورة على المماس هو العمود
* المقام على المحور من رأس المنحنى

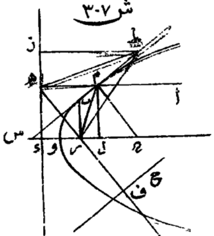
* نتيجة ٣ — اذا أخذت نقطة م فى التقرب شيأ فشيأ من نقطة ا فان زاوية ى م ر
* تقرب من القائمتين ويقرب المستقيم المنصف م ع من أن يكون عمودا على المحور واذن
* فيكون مماس المنحنى فى رأسه عمودا على المحور

* نتيجة ٤ — يسهل مشاهدة تساوى الابعاد ع ر و ع ى و ع ى على الشكل وقيام
* الزاوية م ع م واذن فحل رؤس الزوايا القائمة المرسومة على القطع المكافئ هو الدليل

---

* نظـــــــرية

* (٣٨٦) تحت العمود (الرأسى) فى القطع المكافئ كمية ثابتة ومساوية نصف القطر البورى
* العمودى على المحور (شكل ٣٠٧)



* اذا مد من نقطة م احدى نقط القطع المكافئ
* مماس له م س وأنزل منها العمود م ل على
* المحور واقيم م ن عمودا على المماس ومد حتى
* يلاقى المحور فى نقطة ن فيكون البعد ل ن
* هو ما يسمى بتحت العمود (الرأسى) ثم اذا وصل
* م ر وأنزل م هـ عمودا على الدليل ووصل
* ر هـ فيكون هذا المستقيم عمودا على المماس
* بناء على النظرية السابقة واذن فيكون موازيا العمود المنحنى م ن وبناء عليه يكون الشكل
* م هـ ر ن متوازى أضلاع ويحدث

* ر ن = م هـ = ى ل أو ر ن — ر ل = ى ل — ل ر أو ل ن = ر ى

* ويرمز عادة لهذا البعد ر ى بالحرف ع ويكون تحت العمود = ع وأما مساواة البعد
* ر ى بالاحداثى الرأسى ر ب المقابل للبورة أو الوتر البورى فهو ظاهر وبذلك يثبت المطلوب

---

* نظـــــــرية

* (٣٨٧) تحت المماس فى القطع المكافئ يساوى ضعف الاحداثى الافقى لنقطة التماس
* (شكل ٣٠٧)

* الاحداثى الافقى لاى نقطة مثل م هو البعد و ل المحصور بين رأس المنحنى و وبين

* موقع الاحداثى الرأسى ل للنقطة المذكورة وأما تحت المماس فهو البعد ل س المحصور
* بين موقع الاحداثى الرأسى لنقطة التماس وبين نقطة تقابل المماس بالمحور
* اذا تقرر هذا يقال ان المثلث م ر س متساوى الساقين لتساوى زاويتين منه على مقتضى
* الخواص الاصلية للمماس ويكون ر س = ر م = م هـ = ل ى وبناء عليه يكون
* ر ل = ى س وحيث ان و ر = و ى تكون نقطة و وسط البعد ل س ويكون
* ل س = ٢ و ل وهو المراد

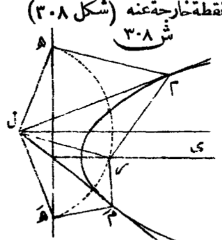
نظـــــــرية

* (٣٨٨) الاحداثى الرأسى لأى نقطة من القطع المكافئ وسط متناسب بين الاحداثى الافقى
* لها و بين الوتر البورى (شكل ٣٠٧)
* ليكن م س مماسا للقطع المكافئ و م ل الاحداثى الرأسى لنقطة التماس م و م ى رأس
* المنحنى فى نقطة م فانه يتحصل من المثلث القائم الزاوية م ى س ان $\overline{\text{م ل}}^{2}$ = ل س × ل ى
* وبناء على النظرية السابقة يحدث
* $\overline{\text{م ل}}^{2}$ = ٢ و ل × ع = ٢ ع × و ل وهو المراد

* تنبيه — يرمز عادة بالحرف س للاحداثى الافقى لاى نقطة وبالحرف ص للاحداثى
* الرأسى لها فيحدث ص^{2} = ٢ ع س ويسمى هذا الارتباط بمعادلة المنحنى ويسمح برسمه
* نقطة فنقطة

عمليـــــة

* (٣٨٩) المطلوب رسم مماس للقطع المكافئ من نقطة خارجة عنه (شكل ٣٠٨)



* لتكن ل النقطة المفروضة خارج القطع
* المكافئ فاذا فرض ان المسئلة محلولة وان ل م
* هو المماس المطلوب لزم البحث عن نقطة
* التماس م
* فاذا امد من هذه النقطة نصف القطر البورى
* م ر وأنزل العمود م هـ على الدليل يشاهد
* ان معرفة نقطة هـ كافية لتعيين نقطة م

* بواسطة تقابل م هـ بالعمود ل م النازل من نقطة ل على ر هـ
* ولتعيين نقطة هـ يقال حيث ان ل هـ = ل ر بناء على ما تقرر (بنمرة ٣٨٥ نتيجة ٤)
* فتؤخذ نقطة هـ بناء على ذلك فى تقابل الدليل بمحيط الدائرة الذى مركزه ل ونصف قطره
* ل ر لكنه لما كان محيط الدائرة يقابل الدليل عموما فى نقطتين هـ و هـَ فيكون للمسئلة
* اذا على وجه العموم حلان ل م و ل مَ
* تنبيه — لاجل أن تكون المسئلة ممكنة يجب ويكفى أن يقابل محيط الدائرة الدليل وهذا
* يستلزم أن يكون بعد نقطة ل عن البورة أكبر من بعدها عن الدليل أعنى انها تكون خارجة
* عن المنحنى وأما اذا وجدت عليه فان الدائرة ل ر تكون مماسة للدليل وبذا يؤل الحلان
* الى واحد

* عمليـــــة

* (٣٩٠) المطلوب مد مماس للقطع المكافئ يكون موازيا لاتجاه معلوم (شكل ٣٠٧)
* ليكن ع ى الاتجاه المعلوم ونفرض ان المسئلة محلولة وان م ط هو المماس المطلوب لزم
* اذا البحث عن نقطة التماس م
* فاذا أنزلنا من نقطة م العمود م هـ على الدليل كانت معرفة نقطة هـ كافية لتعيين نقطة
* م على مقتضى خواص المماس المقررة وللوصول الى ذلك يقال
* اذا وصل ر هـ كان هذا المستقيم عمودا على المماس أو على الاتجاه المعلوم وبناء عليه فانه
* يكفى لتعيين نقطة هـ أن ينزل من نقطة ر عمود على الاتجاه المعلوم ويمد حتى يلاقى الدليل
* تنبيه — اذا تغير وضع الاتجاه ى ع وأخذ شيأ فشيأ الى غير نهاية فى القرب من أن يكون
* موازيا للمحور فان نقطة هـ تتباعد عن الدليل الى غير نهاية وكذا تتباعد نقطة ل عن
* مماس رأس المنحنى الى غير نهاية وأما نقطة م فانها تتباعد عن المنحنى الى غير نهاية أيضا
* فاذا صار ى ع موازيا للمحور فان نقطة هـ تنعدم ولا يكون للمنحنى مماس أو يكون مماسه
* موجودا على بعد لانهائى

الفصـــــل الثـالث

فى القطـــع الزائـــد

تعـــاريف

(٣٩١) القطع الزائد هو محـل النقط التى يكون الفرق بين بعدى كل واحـدة منها عن نقطتين ثابتتين فيه ثابتا دائما (شكل ٣٠٩)

النقطتان الثابتتان تسميان بورتى القطع الزائد ويرمز لهما بالرمزين ر و رَ

بعـد أى نقطة من نقط المحل عن أى واحدة من البورتين يسمى نصف قطر بورى ويرمز لنصفى القطرين البوريين لاى نقطة بالحرفين ص و صَ ويرمز للفرق الثابت بين نصفى القطرين البوريين لاى نقطة بالمقدار ٢ ا وأما البعد بين البورتين فيرمز له بالمقدار ٢ حـ

(٣٩٢) تعريف مماس القطع الزائد هو عين تعريف مماس القطع الناقص

المبحث الاول

فى رسم القطـــع الزائـــد

عمليــــة

(٣٩٣) المطلوب رسم القطع الزائد

الطريقة الاولى ـ وهى طريقة رسمه نقطة فنقطة (شكل ٣٠٩)

لتكن ر و رَ بورتى القطع الزائد وليكن ٢ حـ البعد الكائن بينهما و ٢ ا الفرق الثابت المعلوم الذى يجب أن يكون أقـل من ٢ حـ لان الضلع ر رَ أو ٢ حـ من المثلث م ر رَ أكبر من الفرق بين الضلعـين الآخرين م رَ ـ م ر أو أكبر من ٢ ا فاذا أخذ على المستقيم ر رَ كل واحد من البعدين ر كَ و رَ ك مساو ٢ ا ونصف كل واحـد من ر ك و رَ كَ فانا نتوصل الى نقطتى ل و لَ من نقط المنحنى وذلك لان

ل رَ ــ ل ر = رَ ك = ٢ ا ، و لَ ر ــ لَ رَ = ر كَ = ٢ ا

ثم اذا فرضت نقطة مثل ى على يمين نقطة ل وجعلت نقطة رَ مركزا ورسم محيط دائرة بنصف قطر مساو رَ ى ثم جعلت بعد ذلك ر مركزا ورسم محيط دائرة بنصف قطر مساو رَ ى ــ ٢ ا = ك ى فانه يقطع الاول فى النقطتين م و مَ وتكونان من نقط المنحنى لان

م رَ ــ م ر = رَ ى ــ ك ى = ٢ ا

ثم اذا غيرنا نصفى القطرين ببعضهما وركزنا فى البورتين ورسمنا محيطى دائرتين اخريين فانا نتوصل الى نقطتين جديدتين ن و نَ

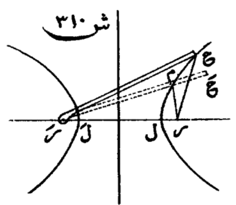
تنبيه ــ لاجل ان يتقاطع محيطا الدائرتين يجب ويكفى أن يكون

أولا ر رَ < رَ ى + ك ى وثانيا ر رَ > رَ ى ــ ك ى

ومن ذلك يشاهد ان هذين الشرطين لا يتحققان الا اذا كانت نقطة ى على يمين نقطة ل وأما اذا انطبقت نقطة ى على ل فان المحيطين يتماسان وبذلك يتحد نقطتا م و مَ معا فى نقطة ل

نتيجة ١ ــ ينتج مما ذكر أن محورى تماثل نقط المنحنى هما ر رَ والمستقيم ف فَ العمودى عليه والمار بنقطة و وسط ر رَ

نتيجة ٢ ــ حيث ان البعد رَ ل هو النهاية الصغرى للابعاد ى رَ فيتركب المحل اذا أولا من قسم ذى فرعين لانهائيين متماثلى الوضع بالنسبة للمستقيم ر رَ وموضوعين على يمين ف فَ ثم انه بتغيير نصفى القطرين يتوصل ثانيا الى قسم آخر موضوع على شمال ف فَ ومماثل للاول وبناء عليه فيتركب المحل من جزأين خارجين عن المسافة المحصورة بين العمودين المقامين على ر رَ من نقطتى ل و لَ



نتيجة ٣ ــ حيث ان نقطة و مركز تماثل فتسمى لهذا السبب بمركز المنحنى

الطريقة الثانية ــ وهى طريقة رسمه دفعة واحدة (شكل ٣١٠)

اذا تصورنا نهاية مسطرة يدور حول البورة رَ وربطنا فى النهاية الثانية ع لها خيطا ينقص طوله عن طول المسطرة بالمقدار الثابت ٢ ا وثبتنا طرفه الثانى فى البورة ر ثم أدرنا المسطرة حول

البورة ن َ وشددنا الخيط بسن قلم راسم م مع انطباقه دائما على المسطرة فانه يرسم قوسا من منحنى القطع الزائد لان

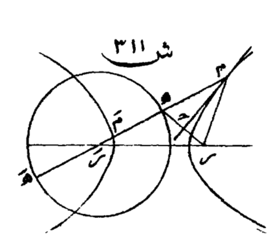
م نَ — م ن = م نَ + م ح — (م ن + م ح) = ح نَ — ح ن = ٢ ا

المبحث الثانى

فى بعض نظريات مهمة

نظريه

(٣٩٤) القطع الزائد هو محل النقط المتساوية البعد عن نقطة ثابتة وعن محيط دائرة ثابت أيضا (شكل ٣١١)



لتكن ن و نَ بورتى القطع الزائد و نَ هـ محيط الدائرة الثابت الذى مركزه نَ ونصف قطره ٢ ا فاذا كانت م احدى نقط القطع الزائد تحصل بناء على التعريف ان

م نَ — م ن = ٢ ا لكن م نَ — م هـ = ٢ ا

فيكون م ن = م هـ واذن فتكون نقطة م على بعدين متساويين من البورة ن ومن محيط الدائرة نَ هـ

وأما نقط الفرع الثانى فهى محققة أيضا لهذه الخاصية وذلك لانه اذا كانت مَ احدى نقط هذا الفرع تحصل مَ ن — مَ نَ = ٢ ا وحيث ان

مَ هـَ — مَ ن = ٢ ا يكون مَ ن = مَ هـَ

الدائرة نَ هـ تسمى بالدائرة الدليلة للبورة ن

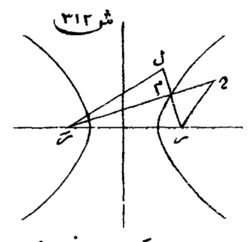
تنبيه — يظهر من هذه النظرية ما بين القطع الناقص والقطع الزائد من قوة الارتباط واذا فيمكن اعتبار هذين المنحنيين كأنهما حالتان خصوصيتان لمحل واحد فالقطع الناقص يقابل الحالة التى تكون فيها ن داخل الدائرة الدليلة التى مركزها نَ وأما القطع الزائد فانه يقابل الحالة التى تكون فيها ن خارجة عنها

* نتيجة — يمكن أن يستنتج من هذه النظرية طريقة جديدة لرسم القطع الزائد ويكون لها
* مزية أخرى وهى تعيين المماس ح م للنقطة المفروضة

---

* نظـــــرية

* (٣٩٥) كل نقطة تفرض داخل القطع الزائد يكون الفرق بين نصفى قطريها البوريين أكبر
* من المحور القاطع وكل نقطة تفرض خارجة عنه
* يكون الفرق بين نصفى قطريها البوريين أقل
* من المحور المذكور (شكل ٣١٢)



* فرعا القطع الزائد يقسمان المستوى الى ثلاثة
* أقسام فيقال لأى نقطة انها داخل القطع
* الزائد متى وجدت مع احدى البورتين فى قسم
* منها ويقال لها خارجة عنه اذا لم يكن الامر
* كذلك

* أولا — لتكن ن داخل القطع الزائد فنصل ن ر و ن رَ و م ر فيحدث
* ن م + م ر > ن ر   واذن يكون
* ن م + م ر + م رَ > ن ر + م رَ أو ن رَ + م ر > ن ر + م رَ
* ومن ذلك يمكن أن يستنتج ان
* ن رَ − ن ر > م رَ − م ر أو > ٢ ا
* ثانيا — اذا كانت ل خارجة فنصل ل رَ و ل ر و م رَ فيحدث
* ل رَ < ل م + م رَ أو ل رَ + م ر < ل م + م ر + م رَ أو
* ل رَ + م ر < ل ر + م رَ
* ومن ذلك ينتج أن ل رَ − ل ر < م رَ − م ر أو < ٢ ا وهو المطلوب

---

* عمليـــــة

* (٣٩٦) المطلوب ايجاد نقط تقاطع مستقيم بمنحنى قطع زائد بدون رسم المنحنى
* ليكن المعلوم من القطع الزائد بورتيه ر و رَ والفرق الثابت ٢ ا والمستقيم المعلوم
* س ص

* فاذا فرضنا ان المسئلة محلولة وان م هى احدى نقط تقابل المستقيم س ص بالمنحنى
* ثم ركزنا فى نقطة رَ ورسمنا الدائرة الدليلة للبورة ر وركزنا أيضا فى نقطة م ورسمنا محيط
* دائرة بنصف قطر مساو م ر فيكون مماسا للمحيط الاول (٣٩٤) وبناء عليه فقد رجعنا
* الى عين الاعمال التى اجريت فى مثل هذه المسئلة فى القطع الناقص
* نتيجة — المستقيم لايمكنه أن يقابل القطع الزائد فى أكثر من نقطتين وبذلك يكون المنحنى
* محدبا

---

* ## المبحث الثالث

* ## فى تماس القطع الزائد

---

* ### نظرية

* (٣٩٧) مماس القطع الزائد فى أى نقطة ينصف الزاوية المكونة من نصفى القطرين
* البورين لهذه النقطة (شكل ٣١٣)
* اذا كانت م احدى نقط القطع الزائد
* واعتبرنا القاطع م مَ س المار بهذه النقطة
* وبأخرى مَ قريبة جدا من الاولى فعلى
* مقتضى الفرض يكون
* م رَ ـ م ر = ٢ ا و مَ رَ ـ مَ ر = ٢ ا
* فاذا عينا نقطة ح المماثلة للبورة ر بالنسبة
* للقاطع ووصلنا بينهما وبين رَ بمستقيم
* ومددناه حتى يقابل القاطع فى نقطة ك فتكون هذه النقطة ممتازة بالاقل عن واحدة من
* النقطتين م و مَ ولتكن عن مَ مثلا فيحدث
* ح رَ = ك رَ ـ ك ر > م رَ ـ م ح أو > م رَ ـ م ر أو > ٢ ا
* واذن تكون نقطة ك داخله القطع الزائد وممتازة عن النقطتين م و مَ وموضوعة
* على الوتر الجامع لهما وغير ذلك يشاهد أن القاطع منصف للزاوية المتكونة بين نصفى القطرين
* البورين ك رَ و ك ر

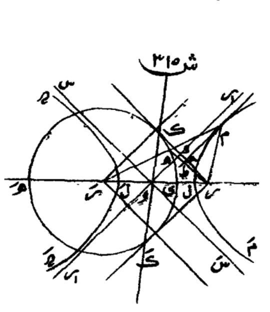
اذا تقرر هذا وفرضنا ان نقطة مَ تقرب شيأ فشيأ الى غير نهاية من نقطة م فان نقطة
ك تقرب أيضا نحو م وأما كرَ و كر فانهما ينتهيان بان ينطبقا على نصفى القطرين
البوريين مرَ و مر وبناء عليه تكون نهاية القاطع م مَ هو المستقيم المنصف
للزاوية رَمر وهو المطلوب

عمليـــة

(٣٩٨) المطلوب مد مماس للقطع الزائد من نقطة مفروضة عليه (شكل ٣١٤)
لتكن م نقطة مفروضة على القطع الزائد
ولتكن ر و رَ بورتيه وليكن ٢ ا المحور
القاطع فنمد نصفى القطرين البوريين مرَ و
مر ثم نأخذ على مرَ البعد مهـ = مر
وننزل من نقطة م العمود مط على هـر
فيكون منصفا للزاوية رَمر وحينئذ
يكون مماسا للقطع الزائد على مقتضى
النظرية السابقة

شكل ٣١٤

نتيجة — مماس القطع الزائد يوجد بتمامه بين فرعى المنحنى
وذلك لانه اذا كانت ل نقطة ما من هذا المماس مغايرة لنقطة م فنصل بينها وبين النقط
ر و هـ و رَ بمستقيمات فيحدث أن ل رَ — ل هـ = ل رَ — ل ر < رَ هـ
أو < ٢ ا واذن فتكون نقطة ل خارجة عن القطع الزائد وهو المطلوب
ولنبحث الآن عن الوضع النهائى لمماس القطع الزائد متى انتقلت نقطة تماسه على المنحنى
وأخذت فى التباعد الى غير نهاية (شكل ٣١٥)



شكل ٣١٥

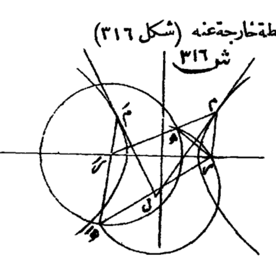
لتكن م نقطة من القطع الزائد فنرسم الدائرة
الدليلة للبورة ر ونمد نصفى القطرين
البوريين مرَ و مر ولتكن هـ نقطة
تقابل مرَ بمحنى الدائرة فالعمود مط
النازل على هـر يكون مماسا للقطع الزائد
فى نقطة م ثم نمد من نقطة ر المماسين
رك و ركَ لمحيط الدائرة الدليلة

* أولا ــ اذا كان وضع النقطة هـ فى ى على المستقيم ب بَ تكون نقطة م فى الوضع ل
* ويكون المماس عمودا على ب بَ
* ثانيا ــ اذا سارت نقطة هـ نحو ك فان نقطة م تصعد على منحنى القطع الزائد
* ويصنع المماس زاوية حادة مع المحور ب بَ
* ثالثا ــ اذا قربت نقطة هـ من أن تتحد مع نقطة ك فان ب هـ يقرب من أن يكون
* عمودا على بَ هـ وحينئذ فالعمود المقام على وسط ب هـ يقرب نحو و ى الموازى الى
* بَ ك واذن فتبعد نقطة التماس عن المنحنى الى غير نهاية
* وبالعكس اذا أخذت نقطة التماس فى التباعد عن المنحنى الى غير نهاية يكون الوضع النهائى
* للمماس هو المستقيم و ب١ الذى يمر بالمركز ولا يقابل المنحنى ويسمى هذا المستقيم الشهير
* بالخط التقربى للمنحنى
* يظهر من تماثل المنحنى ان و بَ١ امتداد المستقيم و ب١ هو خط تقربى وان المستقيم و س
* المماثل للمستقيم و ب١ بالنسبة للمحور هو خط آخر تقربى
* يؤخذ من المثلث و ى ب ان و ى = ½ بَ ك = ا = و ل
* وهذه الملحوظة يتوصل بها لرسم الخطين التقربيين لقطع زائد معلوم مع السهولة

---

* عمليـــــة

* (٣٩٩) المطلوب مد مماس للقطع الزائد من نقطة خارجة عنه (شكل ٣١٦)



* لتكن لَ النقطة المعلومة بين فرعى المنحنى
* فنفرض ان المسئلة محلولة وان ل م هو
* المماس المطلوب فيلزم البحث عن نقطة
* التماس م
* ولذلك يقال اذا رسمنا الدائرة الدليلة للبورة ب
* وكانت هـ نقطة تقابل محيط هذه الدائرة
* بنصف القطر البورى م بَ فمن المعلوم ان
* نقطة م تتعين اذا علم وضع نقطة هـ لكنه
* حيث كان ل ب = ل هـ تكون نقطة هـ موجودة فى تقابل محيط الدائرة الدليلة بالدائرة
* التى مركزها ل ونصف قطرها ل ب

* وهاتان الدائرتان تتقاطعان عموما فى نقطتين هـ و هـَ فيكون اذن للمسئلة حلان
* لم و لمَ
* تنبيه — لاجل أن تقبل المسئلة هذين الحلين يجب ويكفى تقاطع محيطى هاتين الدائرتين
* وهذا يستلزم أن يكون البعد بين المركزين ل مَ أقل من مجموع نصفى القطرين ٢ا و ل م
* وأكبر من فاضلهما
* أولا — اذا كانت ل من فرعى المنحنى وليست على المستقيم م مَ فان النقط الثلاثة
* ل و م و مَ يتكون منها مثلث يحدث منه أن

* لمَ + لم > ٢جـ > ٢أ (١)

* فاذا كان لمَ أقل من لم مع وجود نقطة ل خارجة حدث

* لم — لمَ < ٢أ (٢)

* ويحدث بداهة أن لمَ < لم + ٢أ (٣)

* واذا كان لمَ أكبر من لم بفرض أن نقطة ل خارجة حدث

* لمَ — لم < ٢أ (٤)

* ويحدث بداهة أن لم < لمَ + ٢أ (٥)

* ينتج من الارتباطات (١) و (٢) و (٣) أن لمَ أصغر من مجموع نصفى القطرين
* وأكبر من فاضلهما
* وينتج ماذكر أيضا من الارتباطات (١) و (٤) و (٥)
* ثانيا — اذا كانت ل موجودة على م مَ بين رأسى المنحنى فان الارتباطات (١) و (٢)
* و (٣) و (٤) و (٥) تحقق وتقبل المسئلة حلين
* ثالثا — اذا كانت نقطة ل على المنحنى يتحصل لمَ = لم + ٢أ وحينئذ تماس
* الدائرتان وبذلك يتحد المماسان معا
* رابعا — اذا وجدت نقطة ل على أحد الخطين التقريبين فان أحد المماسين ينطبق على
* هذا الخط التقريبى وتكون نقطة التماس على بعد لانهائى
* خامسا — اذا انطبقت نقطة ل على مركز المنحنى فان المماسين ينطبقان على الخطين
* التقريبين
* سادسا — اذا وجدت نقطة ل داخل المنحنى وفى جهة واحدة مع البورة م حدث
* لمَ — لم > ٢أ وحينئذ يكون المحيطان متباعدين وبذلك لا يكون للمسئلة حلول

عمليـــــه

* (٤٠٠) المطلوب مد مماس للقطع الزائد يكون موازيا لاتجاه معلوم (شكل ٣١٧)
* ليكن و ل الاتجاه المعلوم كائنا في الزاوية
* س َ و ب المتكونة من الخطين التقريبين
* فاذا فرض أن المسئلة محلولة وأن م ط هو
* المماس المطلوب فنمد نصفي القطرين البوريين
* م ر َ و م ر لنقطة م ونرسم الدائرة الدليلة
* للبورة ر فتكون نقطة هـ وهي تقابل
* الدائرة الدليلة بنصف القطر البوري م ر َ
* مماثلة للنقطة ر بالنسبة للمماس وحينئذ
* فيكون تعيين هذه النقطة كافيا لحل المسئلة
* ولتعيينها يقال حيث ان ر هـ عمود على المماس فيكون عمودا أيضا على موازيه و ل واذن
* فتتعين نقطة هـ بتقاطع الدائرة الدليلة للبورة ر مع العمود النازل من نقطة ر على
* الاتجاه المعلوم
* وحيث ان هـذين المحلين يتقاطعان عموما في نقطتين فيكون اذن على وجه العموم للمسئلة
* حلان ط م , ط َ م َ
* تنبيه — اذا فرضنا أن الاتجاه المعلوم و ل يدور حول نقطة و ليقرب من الخط التقريبي
* و ب فان العمود ر ك والحلين م ط , م َ ط َ يقربان نحو الخط التقريبي ب ب َ
* واذا استمر و ل في دورانه وأخـذ الوضع و م فان العمود المنزل من نقطة ر على و ل
* لا يقابل الدائرة الدليلة وبذلك لا يكون للمسئلة حلول
* وينتج من هذه المناقشة أن الاتجاه و ل يجب أن يكون محصورا في زاوية الخطين التقريبين
* س َ و ب

الفصـــــل الرابــــع

فى المنحنى البريمى

تعـــــريف

(٤٠١) المنحنى البريمى هو المتولد من تحرك نقطة على سطح اسطوانى تحركى بحيث يكون بعدها عن قاعدتها مناسبا للقوس المحصور بين الوضع الابتدائى للراسم وبين وضعه المار بها

فاذا تصورنا تحرك النقطة م مثلا على سطح اسطوانى تحركى (شكل ٣١٨) وكان بعدها فى كل لحظة عن قاعدة الاسطوانة م ل مثلا مناسبا للقوس ا ل المحصور بين الوضع الابتدائى للراسم وبين وضعه المار بنقطة م المتحركة فان المنحنى المتولد من ذلك يسمى منحنيا بريميا

ومن المعلوم أنه متى وصلت النقطة المتحركة م الى الوضع الابتدائى للراسم فى نقطة ا فان النقطة ل تكون قد أتمت مرورها على محيط دائرة القاعدة ويسمى البعد م ل بالاحداثى الرأسى للنقطة المتحركة فى الوضع م وأما البعد اا فيسمى بخطوة البريمة وأما قوس المنحنى البريمى المحصور بين نقطة ا ونقطة ا فيسمى بلفة المنحنى البريمى

ثم اذا جعل س رمزا لنصف قطر قاعدة الاسطوانة و ع للاحداثى الرأسى للنقطة المتحركة و هـ للقوس ا ل و ح لخطوة البريمة تحصل على مقتضى التعريف

$$\frac{\text{ع}}{\text{ح}} = \frac{\text{هـ}}{\text{٢ط س}} \quad \text{ومنه} \quad \text{ع} = \frac{\text{ح}}{\text{٢ط س}} \times \text{هـ}$$

نظــــــرية

(٤٠٢) يمكن اعتبار المنحنى البريمى كأنه متولد من مستقيم موجود فى مستو يلتف على اسطوانة (شكل ٣١٨)

لذلك يعد مستويًا بالراسم ا ا ويرسم عليه المستطيل اأ أَ ا بحيث تكون قاعدته مساوية لطول محيط دائرة قاعدة الاسطوانة ثم نقسم الارتفاع أ أَ الى جملة أقسام متساوية ثلاثة مثلا ونعد المستقيمين ا أَ و ا أَ موازيين للقاعدة ونصل الاقطار أ ا و ا ا و أَ ا ثم نمد مستقيمًا ما ل لَ موازيًا الى ا ا وقاطعا للاقطار فى النقط مَ و مَ و مَ فيحدث

$$\frac{مَ لَ}{أَ أ} = \frac{ا ل}{ا ا} \quad \text{واذن يكون} \quad مَ لَ = \frac{أَ أ}{٢ ط س} \times ا ل$$

وحينئذ يكون مَ لَ احداثيا رأسيا للمنحنى البريمى يكون أ أَ خطوة له لان ا ل يدل على قوس من محيط القاعدة وبناء عليه اذا التف المستطيل ا أ أَ ا على الاسطوانة فان المستقيم ا ا يلتف على محيط القاعدة والمستطيل على السطح الجانبى للاسطوانة والقطر أ ا يلتف على لفة البريمة ا م ا حيث ان احدى نقط هذا القطر مَ تنطبق على نقطة مناظرة لها من لفة البريمة وأما باقى الاقطار فانها تتم المنحنى

نظـــــــرية

* (٤٠٣) الزاوية التى يصنعها راسم المنحنى البريمى مع راسم الاسطوانة ثابتة دائمًا (شكل ٣١٨)
* وللبرهنة على ذلك نفرض نقطة ما مً قريبة جدا من نقطة م وليكن مً لً احداثيها
* الرأسى فالمستقيمان م مً و ل لً يتقاطعان فى نقطة ىَ ويكون

$$\frac{م ل}{ا ل} = \frac{مً لً}{ا لً} = \frac{م ل}{ىَ ل} = \frac{مً لً}{ىَ لً}$$

* واذن يكون

$$\frac{ىَ ل}{ا ل} = \frac{ىَ لً}{ا لً} = \frac{\text{وتر ل لً}}{\text{قوس ل لً}}$$

* فاذا قربت مً من م فان النسبة بين الوتر وقوسه تقرب من الوحدة وبناء عليه يكون

$$\text{نهاية } ىَ ل = ى ل = \text{قوس ا ل}$$

* والخط ى ل يسمى تحت المماس وحينئذ فيكون تحت المماس لاى نقطة من منحن بريمى
* مساويا للقوس القاعدة المقابل لهذه النقطة
* فاذا أخذ على المستطيل ا أ ا البعد ا لَ = ا ل يكون الاحداثى الرأسى مَ لَ
* مساويا م ل واذن فيكون المثلث مَ لَ ا مساويا للمثلث م ل ى وبناء عليه فيصنع
* المماس زاوية ثابتة مَ ا ا مع الراسم وهو المراد

* تنبيه — ماذكرناه يتوقف على أن النسبة بين قوس ووتره تكون نهايتها الوحدة متى صغر
* القوس واخذ فى القرب من الصفر

الفصل الخامس

تمرينات

١ — المطلوب رسم القطع الناقص اذا علم منه

أولا — بورة ومماسان واحدى نقطه

ثانيا — بورة ومماسان واحدى نقطتى التماس

ثالثا — بورة ومماس واحد ونقطة تماسه واحدى نقط المنحنى

رابعا — بورة ورأس ونقطة من نقطه

خامسا — بورة وثلاث نقط من نقطه

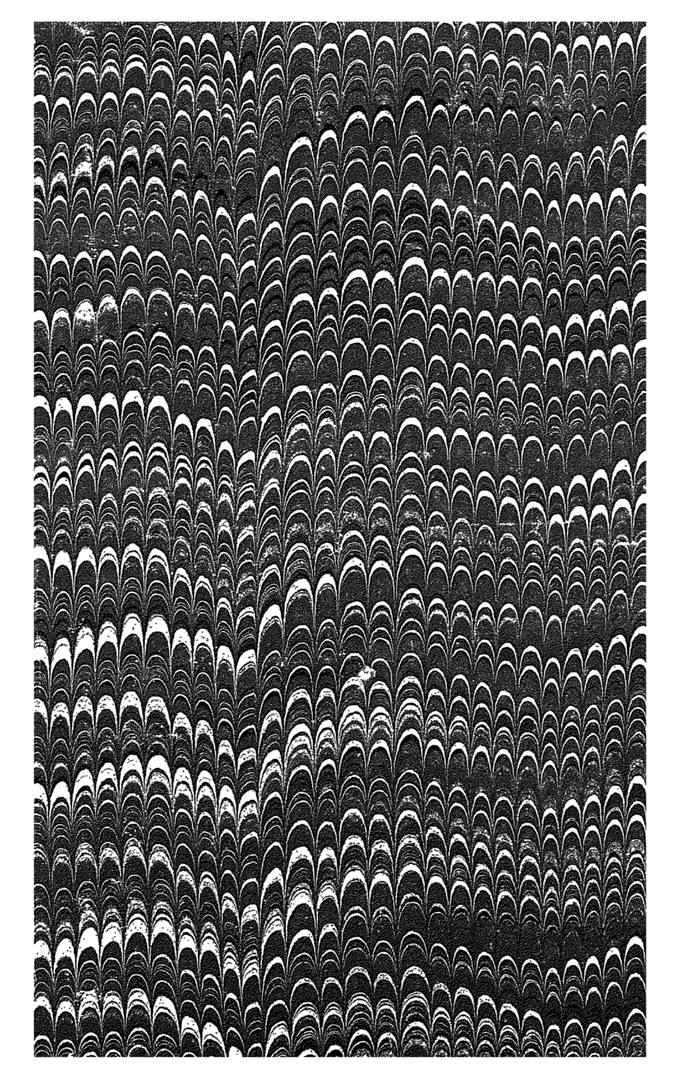
* ٢ — المطلوب رسم القطع المكافئ اذا علم منه
* أولا — البورة ومماسان
* ثانيا — الدليل ومماسان
* ثالثا — البورة ومماس ونقطة تماسه
* رابعا — الدليل ومماس ونقطة تماسه
* خامسا — البورة ومماس واحدى نقط المنحنى
* سادسا — الدليل ومماس واحدى نقط المنحنى
* سابعا — البورة ونقطتان من نقط المنحنى
* ثامنا — الدليل ونقطتان من نقط المنحنى
* ٣ — المطلوب معرفة المحل الذى ترسمه احدى نقط مستقيم ذى طول ثابت تنزلق نهايتاه على
ضلعى زاوية قائمة

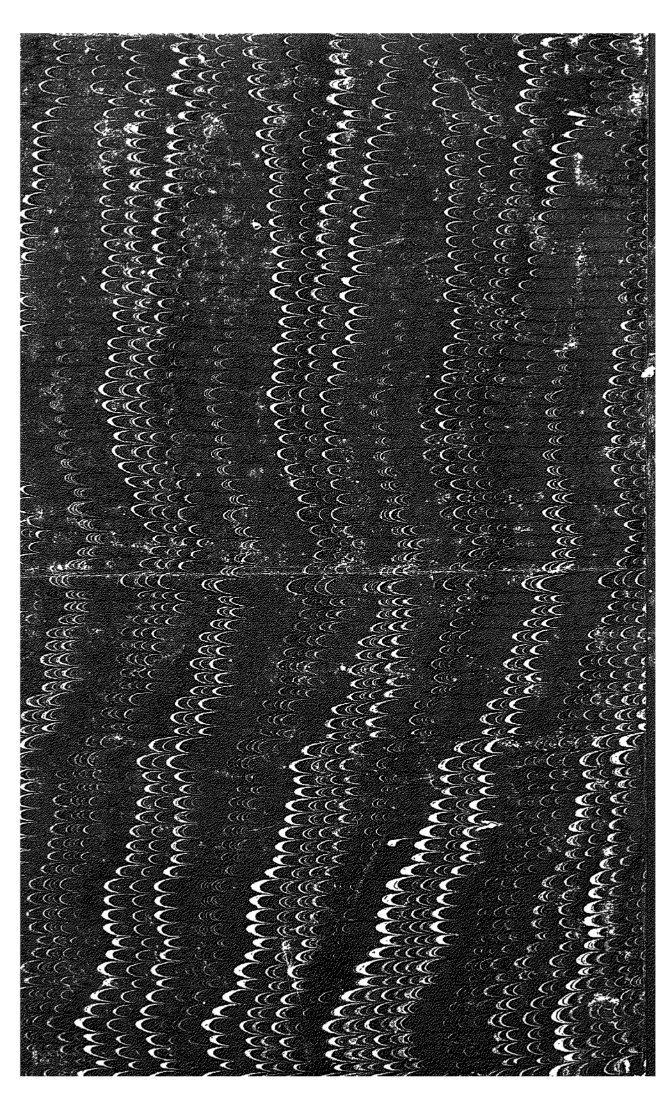
يقول خادم تصحيح العلوم بدار الطباعة البهية ببولاق مصر المعزية الفقير الى الله تعالى
محمد الحسينى أعانه الله على أداء واجبه الكفائى والعينى

يا مصور المكونات على أبدع الاشكال ومشيد أركان ملكك على محكم قواعده باتقن مثال
نحمدك اذ أحطت بنا دائرة امتنانك وأدرت لنا معدل رحمتك وأدررت علينا غيوث احسانك
ونصلى ونسلم على سيدنا ومولانا محمد قطب فلك الجمال ومركز مدار الجلال وعلى آله وصحبه
ومحبيه وحزبه (أما بعد) فقد تم طبع هذه الدرة اليتيمة وتكمل حسن هذه البضة الوسيمة
وتجمل وشى هذه المنمقة الرخيمة المسماة (بالتحفة البهية فى الاصول الهندسية) نسيجة بنان
الصنع الماهر ونتيجة فكر الالمعى الباهر النابغة الاديب والجهبذ اللبيب ذى الطبع الرقيق
والخلق القويم عزتلو احمد بك نظيم ناظر مدرسة دار العلوم البهية وقلم الترجمة بالمعارف الملكية
فجاءت بحمد الله تميس عجبا بهذا الجمال وتخطر تيها بين ندمان المعارف بهذا الدلال بالمطبعة
الكبرى العامرة ببولاق مصر القاهرة فى ظل الحضرة الفخيمة الخديوية وعهد الطلعة
البهية التوفيقية حضرة من جعله الله رحمة لرعيته ونعمة كبرى على بريته الملحوظ
من مولاه بعين العناية والحماية والتوفيق افندينا أبو العباس محمد توفيق
لا زالت ألوية النصر خافقة على هامته مؤيدا من الله برعايته مهنأ
البال باشباله فرح الفؤاد بأنجاله وكان تمام هذا الطبع
البهيج وتعطر الارجاء بعرفه الاريج فى أواخر محرم
الحرام افتتاح عام ست بعد ثلثمائة والف
من هجرته عليه أفضل الصلاة والسلام
وعلى آله مصابيح الظلام
وأصحابه بدور التمام
آمين

فهرســــة الجزء الرابـع من التحفة البهية

(تمت)






Bibliotheca Alexandrina
0556907